



REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
QENDRA E SHËRBIMEVE ARSIMORE

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS
NË ARSIMIN E MESËM TË ULËT

Faza e dytë

Klasa 9

6 dhjetor 2025

Udhëzime për nxënësin:

- Olimpiada fillon në orën 10:00 dhe mbaron në orën 13:00.
- Testi përmban 5 pyetje.
- Për secilën pyetje është lënë hapësira e nevojshme për të shkruar përgjigjen.

Për përdorim nga komisioni i vlerësimit

Pyetja	1	2	3	4	5
	10 pikë	10 pikë	10 pikë	10 pikë	10 pikë
Pikët e fituara					

Totali i pikëve të fituara

KOMISIONI I VLERËSIMIT

1.....

2.....

1. Arbeni dhe Blerta vrapuan rreth pistës së shkollës së tyre me gjatësi 400 metra.

Ata u nisën njëkohësisht nga e njëjta pikë, por në drejtime të kundërta të njëri-tjetrit. Blerta përfundoi xhiron 27,2 sekonda pasi kaloi Arbenin dhe Arbeni e përfundoi xhiron e tij për 42,5 sekonda pasi kaloi Blertën. Gjeni kohën që iu desh Blertës për të përshkuar xhiron me kushtin që secili prej tyre ka vrapuar me shpejtësi konstante.

10 pikë

Zgjidhje

Supozojmë se Arbeni përfundon xhiron e tij për **a** sekonda dhe Blerta e përfundon xhiron e saj për **b** sekonda pasi ata kalojnë njëri-tjetrit. Le të jetë V_1 shpejtësia e Arbenit dhe V_2 shpejtësia e Blertës. Shënojmë t kohën që ata vrapojnë para se të takohen, kështu që, kur ata takohen, Arbeni ka vrapuar një distancë prej $l_1 = V_1 \times t$, dhe Blerta ka vrapuar një distancë prej $l_2 = V_2 \times t$. Si përfundim, Arbenit i duhet të vrapojë një distancë prej $l_2 = V_2 \times t$, për kohën $\frac{V_2 \times t}{V_1}$. Në mënyrë të ngjashme, Blertës i duhet koha $\frac{V_1 \times t}{V_2}$ për të përfunduar pjesën e

mbetur të xhiros, pasi ka kaluar Arbenin. Meqë $\frac{V_2 \times t}{V_1} = a$ dhe $\frac{V_1 \times t}{V_2} = b$, atëherë duke shumëzuar anë për

anë barazimet marrim:

$t^2 = ab$, nga ku $t = \sqrt{ab}$. Kështu, koha e vrapimit të Blertës është $t = \sqrt{ab} + b$. Si përfundim, duke zëvendësuar $a = 42,5$ dhe $b = 27,2$ kemi që Blerta e përshkoi xhiron për

$$t = \sqrt{42,5 \times 27,2} + 27,2 = 61,2 \text{ sek.}$$

2. Zgjidhni ekuacionin $\frac{11-x}{2} = \sqrt{3-2x} + 2\sqrt{x+3}$.

10 pikë

Zgjidhje

Kryejmë shndërrimet:

$$\frac{11-x}{2} = \sqrt{3-2x} + 2\sqrt{x+3} \Leftrightarrow 11-x = 2\sqrt{3-2x} + 4\sqrt{x+3} \Leftrightarrow x + 4\sqrt{x+3} + 2\sqrt{3-2x} = 11, \text{ nga ku mund}$$

$$\text{të shkruajmë: } 4\sqrt{x+3} + 2\sqrt{3-2x} = 6-x+5$$

Zëvendësojmë:

$$\sqrt{x+3} = m \Leftrightarrow m^2 = x+3$$

$$\sqrt{3-2x} = n \Leftrightarrow n^2 = 3-2x$$

$$\text{Nga ku: } 4m+2n=5+6-x$$

$$\text{Duke mbledhur anë për anë kemi: } \begin{cases} m^2 + n^2 = 6-x \\ 4m+2n=5+6-x \end{cases}$$

$$\text{Kështu që: } \begin{cases} m^2 + n^2 = 6-x \\ 4m+2n=5+6-x \end{cases} \Rightarrow 4m+2n=5+m^2+n^2 \Leftrightarrow m^2-4m+4+n^2-2n+1=0$$

$$\text{Pra: } (m-2)^2 + (n-1)^2 = 0.$$

$$\text{Kështu që: } (m=2 \text{ dhe } n=1) \Leftrightarrow (\sqrt{x+3}=2 \text{ dhe } \sqrt{3-2x}=1) \Leftrightarrow x=1.$$

3. Le të jetë n një numër i plotë çfarëdo. Provoni se numri i shprehur në trajtën $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ është katror i plotë.

10 pikë

Zgjidhje

Shndërrojmë shprehjen e dhënë si vijon:

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= (n^2+n)(n^2+5n+6)+1= \\ &= n^4+5n^3+6n^2+n^3+5n^2+6n+1= \\ &= n^4+6n^3+11n^2+6n+1= \\ &= n^4+6n^3+9n^2+2n^2+6n+1= \\ &= (n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1= \\ &= (n^2+3n+1)^2 \end{aligned}$$

4. Tregoni se për çdo kuboid ka vend mosbarazimi $d \geq \frac{S\sqrt{3}}{3}$, ku d është diagonalja e kuboidit dhe S është shuma e tri përmasave të tij.

10 pikë

Zgjidhje

Le të jenë a, b, c gjatësitë e tri brinjëve (përmasat) e një kuboidi çfarëdo.

Dimë se $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Duke marrë parasysh kushtin e dhënë $S = (a+b+c) \Leftrightarrow S^2 = (a+b+c)^2$.

Nga ana tjetër dimë se $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$ dhe $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ nga ku:

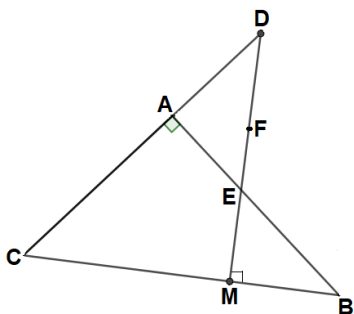
$$3d^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2 = S^2 \Rightarrow d^2 \geq \frac{S^2}{3} \Leftrightarrow d \geq \sqrt{\frac{S^2}{3}} = \frac{S}{\sqrt{3}} = \frac{S\sqrt{3}}{3}.$$

5. Në hipotenuzën BC të trekëndëshit kënddrejtë $\triangle BAC$, ngrihet pingulja MD , e cila pret katetin AB në pikën E dhe zgjatimin e katetit AC në pikën D .

Në pingulen MD merret pika F , e tillë që $MF^2 = ME \times MD$.

Provoni se pika F ndodhet në rrethin e jashtëshkruar trekëndëshit $\triangle BAC$.

10 pikë



Zgjidhje

Bazuar te të dhënat e situatës, kemi $\triangle EMB \sim \triangle CMD$, sepse:

$$\begin{cases} m(\widehat{DMC}) = m(\widehat{EMB}) = 90^\circ \\ m(\widehat{CDM}) = m(\widehat{EBM}) \text{ si kënde plotësues të këndit } \widehat{DCB} \end{cases}$$

Shkruajmë raportin e brinjëve homologe:

$$\frac{MB}{MD} = \frac{ME}{MC} \Leftrightarrow ME \times MD = MB \times MC,$$

kështu që kemi: $ME \times MD = MF^2$

Pra kemi $MF^2 = MB \times MC$ (*).

Për trekëndëshin $\triangle BFC$, Lartësia FM , sipas barazimit (*) është i mesëm i përpjesshëm i projeksioneve të brinjëve CF dhe FB mbi BC (Teorema e Euklidit), rrjedhimisht $\triangle BFC$ është kënddrejtë në F .

Trekëndëshat kënddrejtë $\triangle BFC$ dhe $\triangle BAC$ kanë hipotenuzë të përbashkët e cila shërben si diametër i rrethit të jashtëshkruar këtyre trekëndëshave, çfarë donim të provonim.

