



REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
QENDRA E SHËRBIMEVE ARSIMORE

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS
NË ARSIMIN E MESËM TË LARTË

Faza e dytë

Klasa 11

6 dhjetor 2025

Udhëzime për nxënësin:

- Olimpiada fillon në orën 10:00 dhe mbaron në orën 13:00.
- Testi përmban 5 pyetje.
- Për secilën pyetje është lënë hapësira e nevojshme për të shkruar përgjigjen.

Për përdorim nga komisioni i vlerësimit

Pyetja	1	2	3	4	5
	10 pikë	10 pikë	10 pikë	10 pikë	10 pikë
Pikët e fituara					

Totali i pikëve të fituara

KOMISIONI I VLERËSIMIT

1.....

2.

1. Jepet trekëndëshi kënddrejtë $\triangle ABC$, ($\hat{B} = 90^\circ$). Nëpër kulmin C të këtij trekëndëshi ndërtohet drejtëza (I) pingul me hipotenuzën AC. Në drejtëzën (I), merret pika D e tillë që $DC = BC$.

Tregoni se BD mund të jetë paralele ose pingule me përgjysmoren e këndit $\hat{BAC}$ të trekëndëshit të dhënë.

10 pikë

Zgjidhje

Dallojmë dy raste, në varësi të pozicionit të pikës D në drejtëzën (I), në lidhje me kumin C

Rasti I: Fillimisht provojmë rastin kur $BD \uparrow\uparrow AE$, ku AE është përgjysmorja e këndit $\hat{BAC}$.

Shënojmë me O pikëprerjen e përgjysmores AE me brinjën BC. Në trekëndëshin $\triangle ABC$ kemi që $DC \perp AC$, $DC = BC$ dhe AE përgjysmorja e këndit $\hat{BAC}$.

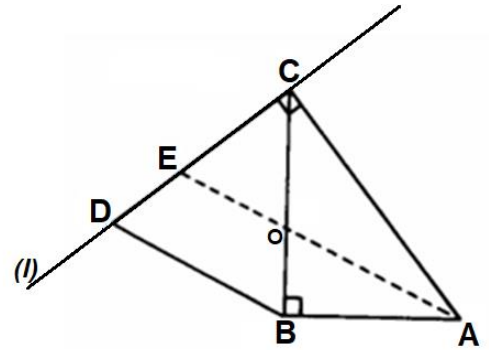
Kemi që $\hat{CEA}$ është kënd plotësues i këndit $\hat{CAE}$ (kënde me shumë 90°).

Gjithashtu $\hat{BOA}$ është plotësues i $\hat{OAB}$, nga ku kemi:

Por nga kushti kemi se $m(\hat{CAE}) = m(\hat{OAB})$, rrjedhimisht $m(\hat{BOA}) = m(\hat{CEA})$, kështu që

$m(\hat{CEO}) = m(\hat{COE})$, pra trekëndëshi $\triangle COE$ është dybrinjënjëshëm.

Jemi në kushtet që trekëndëshat dybrinjënjëshëm $\triangle COE$ dhe $\triangle CDB$ kanë këndin në kulm të përbashkët, kështu që masat e këndeve të bazës janë respektivisht me masa të njëjta. Pra $BD \uparrow\uparrow AE$.



Rasti II: Provojmë se $BD \perp AE$, figura përbri.

Shënojmë E pikëprerjen e përgjysmores AE të këndit $\hat{BAC}$ me BC.

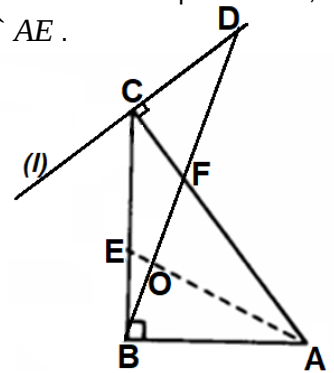
Shënojmë F pikëprerjen e BD me hipotenuzën AC dhe O pikëprerjen e AE me BD.

Kemi $DC \perp AC$, $DC = BC$, AE përgjysmore e $\hat{BAC}$.

Këndi $\hat{CDF}$ është plotësues i këndit $\hat{CFD}$.

Meqenëse $\hat{CFD} \cong \hat{BFA}$ (të kundërt në kulm), atëherë këndi $\hat{CDF}$ është plotësues i këndit $\hat{BFA}$.

Në $\triangle CDB$ kemi $CD = BC$ dhe $\hat{CDB} \cong \hat{CBD}$. Meqenëse këndi $\hat{CBD}$ është plotësues i $\hat{BFA}$, këndi $\hat{CBD}$ është plotësues i $\hat{DBA}$, kështu që $\hat{BFA} \cong \hat{FBA}$ (ku të dy këta janë plotësues të këndit $\hat{CBD}$). Pra $\triangle FAB$ është trekëndësh dybrinjënjëshëm me kulm në A. Por meqenëse AE është përgjysmore, atëherë AE është dhe lartësi e trekëndëshit pra $AE \perp BF \Rightarrow AE \perp BD$.



2. Tregoni se për çdo numër të plotë x , ekziston një pafundësi numrash natyrorë n , të tillë që numrat e trajtës

$$x^{2^n} + 2^n \text{ janë jo të thjeshtë.}$$

10 pikë

Zgjidhje

Për $x=0$, pohimi është i vërtetë, pasi numri ka trajtën $x^{2^n} + 2^n = 0^{2^n} + 2^n = 2^n$, i cili do të jetë i përbërë për një pafundësi numrash natyrorë ($\forall n \in \mathbb{N} / n > 1$).

Supozojmë tani se $x \neq 0$ dhe vijojmë arsyetimin për $x > 0$, pasi për $x < 0$, arsyetimi do të jetë i ngjashëm, mjafton të zëvendësojmë x me $-x$.

Për $x=1 \Rightarrow x^{2^n} + 2^n = 1^{2^n} + 2^n$. Për numrat e trajtës $1+2^n$, kemi një pafundësi numrash natyrorë $n > 1$ dhe jo fuqi të 2-it, për të cilët ata të jenë të përbërë.

Shohim kur $x > 1$ dhe $n \in \mathbb{N} / n$ – çift, pra $n = 2k$ për çdo k – tek dhe $k > 1$. Do të kemi numrat e trajtës $x^{2^{2k}} + 2^{2k} = x^{2^{2k}} + 4 \times 4^{k-1}$.

Zëvendësojmë: $a = x^{2^{n-2}}$ dhe $b = 2^{\frac{k-1}{2}}$, atëherë kemi:

$x^{2^{2k}} + 4 \times 4^{k-1} = a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$, trajtë kjo që tregon se këta numra janë të përbërë për një pafundësi $n \in \mathbb{N}$.

3. Le të jenë x, y, z numra realë jo negativë.

Provoni se ka vend mosbarazimi $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1} \geq \sqrt{6(x+y+z)}$.

10 pikë

Zgjidhje

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1} \geq \sqrt{6(x+y+z)} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1} \geq \sqrt{(x+y+z)^2 + (1+1+1)^2}$$

(Teorema e “treëndëshave”).

Nga ku ka vend:

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1} \geq \sqrt{(x+y+z)^2 + 9} \geq \sqrt{6(x+y+z)} \quad (AM - GM)$$

4. Për një varg gjeometrik dihet se $S_4 = 225$; $S_8 = 900$.

Gjeni shumën e dymbëdhjetë kufizave të para (S_{12}) të këtij vargu.

10 pikë

Zgjidhje e ushtrimit 4

Nga formula për shumën e n-termave të parë të vargut gjeometrik, kemi:

$$S_4 = \frac{a_1(q^4 - 1)}{q - 1} = 225 \text{ dhe } S_8 = \frac{a_1(q^8 - 1)}{q - 1} = 900$$

Kryejmë raportin:

$$\frac{S_8}{S_4} = \frac{900}{225} = 4 \Rightarrow \frac{\frac{a_1(q^8 - 1)}{q - 1}}{\frac{a_1(q^4 - 1)}{q - 1}} = 4 \Leftrightarrow \frac{q^8 - 1}{q^4 - 1} = 4 \Leftrightarrow q^4 + 1 = 4 \Leftrightarrow q^4 = 3$$

Njehsojmë:

$$S_{12} = \frac{a_1(q^{12} - 1)}{q - 1} = \frac{a_1[(q^4)^3 - 1^3]}{q - 1} = \frac{a_1(q^4 - 1)(q^8 + q^4 + 1)}{q - 1} = S_4 \times (q^8 + q^4 + 1) = 225(9 + 3 + 1) = 2\,925$$

Pra $S_{12} = 2\,925$.

5. Vërtetoni se shprehja $A = (a^2 + 5a)(a^2 + 5a + 10) + 24$ shprehet si prodhim i katër numrave të plotë, të njëpasnjëshëm, për çdo $a \in \mathbb{Z}$.

10 pikë

Zgjidhje e ushtrimit 5

Shndërrojmë shprehjen e dhënë si vijon:

$$\begin{aligned} A &= (a^2 + 5a)(a^2 + 5a + 10) + 24 = \\ &= (a^2 + 5a)(a^2 + 5a) + 10(a^2 + 5a) + 24 = \\ &= (a^2 + 5a)^2 + 2 \times 5 \times (a^2 + 5a) + 25 - 1 = \\ &= (a^2 + 5a + 5)^2 - 1 = \\ &= (a^2 + 5a + 5 - 1)(a^2 + 5a + 5 + 1) = \\ &= (a^2 + 5a + 4)(a^2 + 5a + 6) = \\ &= (a + 1)(a + 4)(a + 2)(a + 3) = \\ &= (a + 1)(a + 2)(a + 3)(a + 4) \end{aligned}$$