



REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
QENDRA E SHËRBIMEVE ARSIMORE

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS
NË ARSIMIN E MESËM TË LARTË

Faza e dytë

Klasa 12

6 dhjetor 2025

Udhëzime për nxënësin:

- Olimpiada fillon në orën 10:00 dhe mbaron në orën 13:00.
- Testi përmban 5 pyetje.
- Për secilën pyetje është lënë hapësira e nevojshme për të shkruar përgjigjen.

Për përdorim nga komisioni i vlerësimit

Pyetja	1	2	3	4	5
	10 pikë	10 pikë	10 pikë	10 pikë	10 pikë
Pikët e fituara					

Totali i pikëve të fituara

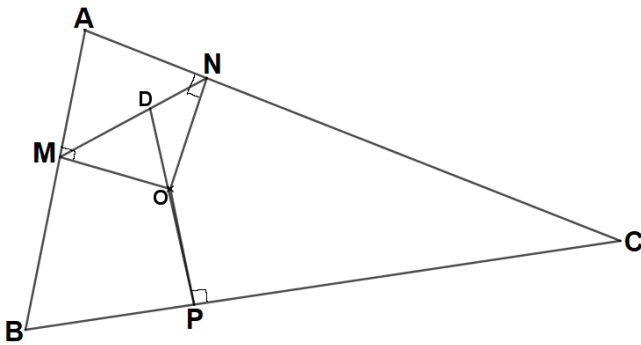
KOMISIONI I VLERËSIMIT

1.....

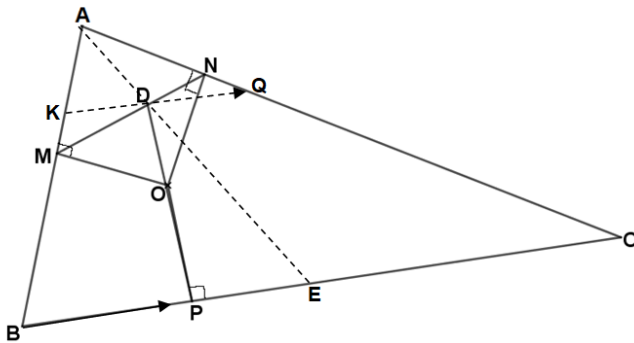
2.....

1. Pika O është qendra e rrethit të brendashkruar trekëndëshit $\triangle ABC$. Siç vihet re në figurë, nga pika O janë hequr pingulet OM , ON dhe OP përkatësisht me brinjët AB , AC dhe BC të trekëndëshit. Pika D është pikëprerja e OP me segmentin MN . Tregoni se pika D ndodhet në mesoren që del nga kulmi A i trekëndëshit $\triangle ABC$.

10 pikë



Zgjidhje



Nga pika D ndërtojmë drejtëzën paralele me brinjën BC të trekëndëshit. Është e qartë se $PD \perp KQ$.

Rrjedhimisht katërkëndëshi $ODKM$ është ciklik, pasi $m(\widehat{ODK}) = m(\widehat{OMK}) = 90^\circ$.

Gjithashtu ciklik është dhe katërkëndëshi $ODNQ$, kështu që $m(\widehat{KDM}) = m(\widehat{KOM})$ dhe $m(\widehat{NDQ}) = m(\widehat{NOQ})$.

Por $m(\widehat{KDM}) = m(\widehat{NDQ})$ si kënde të kundërt në kulm,

rrjedhimisht kemi $m(\widehat{KOM}) = m(\widehat{NOQ})$.

Shqyrtojmë trekëndëshat kënddrejtë $\triangle KOM$ dhe $\triangle NOQ$, të cilët janë kongruentë sepse $OM = ON$ si rreze të rrethit me qendër O , i cili është i brendashkruar trekëndëshit $\triangle ABC$, nga ku del se $OK = OQ$.

Mirëpo $PD \perp KQ$, rrjedhimisht OD është përmesore e segmentit KQ .

Meqenëse AD është mesore e trekëndëshit $\triangle AKQ$ dhe KQ është paralele me BC , atëherë mesorja e trekëndëshit $\triangle ABC$ kalon nga pikat A dhe D , çka donim të provonim.

2. Jepen numrat realë, pozitivë x dhe y , të tillë që $x^n = x+1$ dhe $y^{2n} = y+3x$, ku $n \in \mathbb{N}$.
Provoni vërtetësinë e mosbarazimit $x > y$.

10 pikë

Zgjidhje

Meqenëse $x^n = x+1$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \neq 1$ dhe $(x+1)^2 > 4x$.

Atëherë ka vend: $\left(\frac{y}{x}\right)^{2n} = \frac{y^{2n}}{(x^2)^n} = \frac{y+3x}{(x+1)^2} < \frac{y+3x}{4x}$.

Shënojmë $\frac{y}{x} = a$ dhe kemi:

$$a^{2n} < \frac{1}{4}a + \frac{3}{4} \Leftrightarrow a^{2n} - \frac{1}{4}a - \frac{3}{4} < 0 \Leftrightarrow 4a^{2n} - a - 3 < 0.$$

Vëmë re se për $a=1 \Rightarrow 4a^{2n} - a - 3 = 0$, atëherë mund të shkruajmë:

$$4a^{2n} - a - 3 = (a-1)(4a^{2n-1} + 4a^{2n-2} + \dots + 3) < 0 \Leftrightarrow (a-1) < 0,$$

pasi $(4a^{2n-1} + 4a^{2n-2} + \dots + 3) > 0, \forall a > 0$, rrjedhimisht $a < 1$, pra $\frac{y}{x} < 1 \Leftrightarrow y < x \Leftrightarrow x > y$.

3. Provoni se për çdo tri numra realë a, b, c , ku secili prej tyre është jo më i vogël se 2, mosbarazimi
 $(a^3 + c)(b^3 + a)(c^3 + b) \geq 125abc$ është i vërtetë.

10 pikë

Zgjidhje

Duke pasur parasysh kushtin e dhënë për numrat a, b, c , kemi:

$$a^2 \geq 4 \Rightarrow a^3 \geq 4a$$

$$a^3 + c \geq 4a + c = a + a + a + a + c \geq 5\sqrt[5]{a^4c}$$

Njësoj shkruajmë:

$$b^3 + a \geq 5\sqrt[5]{b^4a}$$

$$c^3 + b \geq 5\sqrt[5]{c^4b}$$

Duke shumëzuar anë për anë përfundimet e nxjerra më sipër, kemi:

$$(a^3 + c)(b^3 + a)(c^3 + b) \geq 125\sqrt[5]{a^5b^5c^5} = 125abc.$$

4. Gjeni të gjitha treshet e renditura $(p; x; y)$, që plotësojnë kushtin $p^x = y^4 + 4$, ku p është numër i thjeshtë dhe x, y janë numra natyrorë. 10 pikë

Zgjidhje

Kryejmë faktorizimin standard te barazimi i dhënë: $y^4 + 4 = (y^2 - 2y + 2)(y^2 + 2y + 2) = p^x$.

Duke pasur parasysh natyrën e numrave p, x, y , është e qartë se:

$(y^2 - 2y + 2) = p^m$ dhe $(y^2 + 2y + 2) = p^n$ ku $m, n \in \mathbb{N} / m + n = x$.

Meqë $y^2 - 2y + 2 < y^2 + 2y + 2 \Rightarrow m < n$, kështu që p^m është pjesëtuesi i p^n .

Atëherë themi se $y^2 - 2y + 2$ është pjesëtuesi i $y^2 + 2y + 2$. Nga ana tjetër duke shkruar

$y^2 + 2y + 2 = y^2 - 2y + 2 + 4y$ themi që $y^2 - 2y + 2$ është pjesëtuesi i $4y$ rrjedhimisht $y^2 - 2y + 2$ është pjesëtuesi edhe i $4y^2$.

Por ne mund të shkruajmë $4y^2 = 4(y^2 - 2y + 2) + 8(y - 1)$, kështu që $y^2 - 2y + 2$ është pjesëtuesi i $8(y - 1)$.

Si përfundim, meqenëse $y^2 - 2y + 2$ është pjesëtuesi i $8(y - 1)$ dhe i $4y$, atëherë $y^2 - 2y + 2$ është pjesëtuesi i $8 - \text{ës}$, pra:

$y^2 - 2y + 2 = 1$ ose $y^2 - 2y + 2 = 2$ ose $y^2 - 2y + 2 = 4$ ose $y^2 - 2y + 2 = 8$

Kur $y^2 - 2y + 2 = 1 \Rightarrow y = 1$ dhe $y^4 + 4 = 5 \Rightarrow p = 5$ dhe $x = 1$

Kur $y^2 - 2y + 2 = 2 \Rightarrow y^2 - 2y = 0 \Rightarrow y = 2$ dhe $y^4 + 4 = 20$ dhe 20 nuk është fuqi e ndonjë numri të thjeshtë.

Për rastet $y^2 - 2y + 2 = 4$ dhe $y^2 - 2y + 2 = 8$, zgjidhjet nuk janë të plota, kështu që zgjidhje e situatës sonë është treshja e vetme $(5; 1; 1)$.

5. Jepet funksioni $f : y = \frac{ax+b}{cx+d}$, ku a, b, c, d janë numra realë, jo zero.

Gjeni bashkësinë e përcaktimit të funksionit f , nëse dihet se për çdo $x \neq -\frac{d}{c}$,

$$f(19)=19; \quad f(97)=97 \text{ dhe } f(f(x))=x.$$

10 pikë

Zgjidhje

Nisemi nga kushti që $\forall x \in \mathbb{R} / x \neq -\frac{d}{c}$ kemi $f(f(x))=x$, pra:

$$\frac{a\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)+b}{c\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)+d} = x \Leftrightarrow \frac{(a^2+bc)x+b(a+d)}{c(a+d)x+bc+d^2} = x \Leftrightarrow c(a+d)x^2+(d^2-a^2)x-b(a+d)=0$$

Te ekuacioni i fundit, është e qartë që koeficienti pranë x^2 është zero, nga natyra e funksionit të dhënë, kështu që: $c(a+d)=0$. Meqenëse $c \neq 0 \Rightarrow a+d=0 \Leftrightarrow a=-d$.

Nga kushtet $f(19)=19$; $f(97)=97$ përftojmë barazimet: $19^2c=2 \times 19a+b$ dhe $97^2c=2 \times 97a+b$.

Nga ku $(97^2-19^2)c=2(97-19)a \Leftrightarrow (97+19)c=2a \Leftrightarrow a=58c$, nga ku del se $b=-1843c$.

Si përfundim formula e funksionit tonë është $f(x)=\frac{58x-1843}{x-58}$ dhe bashkësia E e përcaktimit është

$$E = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 58\}.$$