



REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
QENDRA E SHËRBIMEVE ARSIMORE

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS
NË ARSIMIN E MESËM TË LARTË

Faza e dytë

Klasa 10

6 dhjetor 2025

Udhëzime për nxënësin:

- Olimpiada fillon në orën 10:00 dhe mbaron në orën 13:00.
- Testi përmban 5 pyetje.
- Për secilën pyetje është lënë hapësira e nevojshme për të shkruar përgjigjen.

Për përdorim nga komisioni i vlerësimit

Pyetja	1	2	3	4	5
	10 pikë	10 pikë	10 pikë	10 pikë	10 pikë
Pikët e fituara					

Totali i pikëve të fituara

KOMISIONI I VLERËSIMIT

1.....

2.....

1. Dihet se për çdo vlerë reale të x ka vend barazimi $ax(x-1)(x+1)+bx(x-1)+c(x-1)+d=x^3$.

Gjeni shumën e koeficienteve $a+b+c+d$.

10 pikë

Zgjidhje

Shndërrojmë barazimin e dhënë si vijon:

$$ax(x-1)(x+1)+bx(x-1)+c(x-1)+d=x^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax^3 - ax + bx^2 - bx + cx - c + d = x^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax^3 + (c-a-b)x + bx^2 - c + d = x^3$$

Barazojmë koeficientët polinomialë, homologë të dy anëve të barazimit dhe kemi:

$$\begin{cases} a=1 \\ c-a-b=0 \\ b=0 \\ -c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \\ d=1 \end{cases}$$

Rrjedhimisht $a+b+c+d=3$.

2. Jepet rrethi ω_1 me qendër O dhe diametër AB . Rrethi ω_2 me qendër në pikën B , pret rrethin ω_1 në pikën C dhe diametrin AB në pikën D . Drejtëza CD pret rrethin ω_1 në pikën E , ku $E \neq C$.

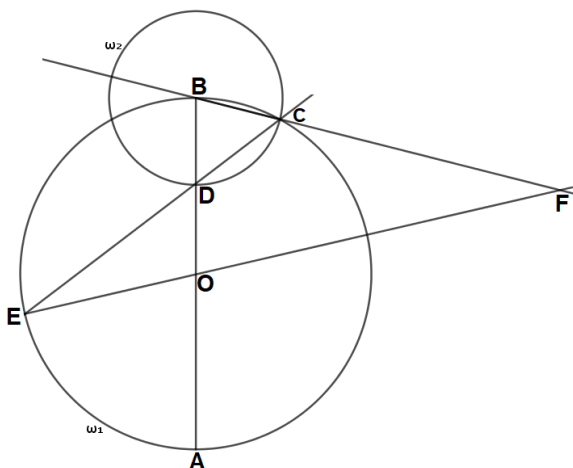
Drejtëza OE pret zgjatimin e BC në pikën F .

- a) Tregoni se trekëndëshi $\triangle OBF$ është dybrinjënjëshëm.

5 pikë

- b) Gjeni raportin $\frac{FB}{BD}$, nëse pika D është mesi i segmentit OB .

5 pikë



Zgjidhje (2a)

Trekëndëshi $\triangle BDC$ është dybrinjënjëshëm, pasi $BD = BC$ si rreze të rrethit ω_2 ,

rrjedhimisht $m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{BCD})$.

Shënojmë $m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{BCD}) = \alpha$,

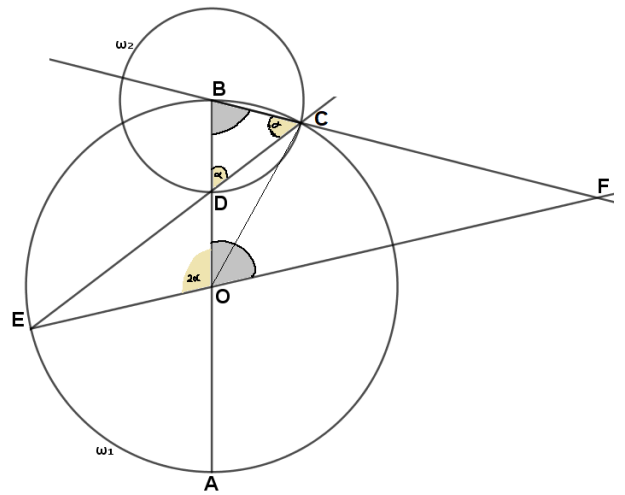
rrjedhimisht $m(\widehat{EOD}) = 2\alpha$

si kënd qendror përgjegjës i këndit rrethor $\widehat{BCE}$ në rrethin ω_1 .

Prej nga kemi se $m(\widehat{DOF}) = 180^\circ - 2\alpha$.

Nga sa thamë më sipër kemi se $m(\widehat{DBC}) = 180^\circ - 2\alpha$, pra $m(\widehat{DOF}) = m(\widehat{DBC}) = 180^\circ - 2\alpha$.

Kështu që $\triangle OBF$ ka dy kënde me masa të njëjta, rrjedhimisht ai është dybrinjënjëshëm, $BF = OF$.


Zgjidhje (2b)

Bashkojmë C me O. Kemi se $\triangle BCO$ është dybrinjënjëshëm, pasi $OB = OC$ si rreze të rrethit ω_1 .

Gjithashtu $\triangle BOC \sim \triangle BOF$ sipas rastit të parë (me dy kënde me masa të njëjta).

Ndërtojmë raportin e brinjëve homologe:

$$\frac{BO}{BF} = \frac{BC}{BO} \Leftrightarrow BO^2 = BF \times BC \quad (1)$$

Por më sipër ne treguam se $BC = BD$, dhe nga kushti kemi se $BO = 2BD$. Zëvendësojmë barazimet e fundit

tek barazimi (1) dhe kemi: $(2BD)^2 = BF \times BD \Leftrightarrow 4BD^2 = BF \times BD \Leftrightarrow \frac{BF}{BD} = 4$.

3. Jepet vargu numerik, i tillë që $a_1 = a_2 = 1$ dhe $a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}}$, $n \geq 3$.

Tregoni se çdo kufizë e këtij vargu është numër i plotë.

10 pikë

Zgjidhje

Nga vetitë e vargut të dhënë, mund të shkruajmë:

$$a_n \times a_{n-2} = a_{n-1}^2 + 2 \quad (1)$$

$$a_{n+1} \times a_{n-1} = a_n^2 + 2 \quad (2)$$

Zbresim anë për anë barazimin (2) nga (1):

$$\begin{aligned} a_n^2 - a_{n-1}^2 &= a_{n+1} \times a_{n-1} - a_n \times a_{n-2} \Leftrightarrow a_n^2 + a_n \times a_{n-2} = a_{n-1}^2 + a_{n+1} \times a_{n-1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a_n(a_n + a_{n-2}) = a_{n-1}(a_{n-1} + a_{n+1}) \end{aligned} \quad (3)$$

Barazimi (3) mund të shkruhet ndryshe: $\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-2}}{a_{n-1}} = k \quad (4)$,

ku k është konstante.

Nga kushti i dhënë $n \geq 3$, është e qartë se ka vend barazimi

$$\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-2}}{a_{n-1}} = k \Rightarrow \frac{a_3 + a_1}{a_2} = k \Leftrightarrow \frac{a_3 + 1}{1} = k.$$

Nga ana tjetër, prej formulës së vargut kemi se:

$$a_3 = \frac{a_2^2 + 2}{a_1} \Leftrightarrow a_3 = 3, \text{ nga ku } \frac{a_3 + 1}{1} = k \Leftrightarrow k = 4.$$

Si përfundim prej barazimit (4), kemi:

$$\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-2}}{a_{n-1}} = 4 \Leftrightarrow a_{n+1} + a_{n-1} = 4a_n \Leftrightarrow a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}, \quad n \geq 3.$$

Barazimi i fundit tregon qartë çka donim të provonim: $\forall n \in \mathbb{N} / n \geq 3 \Rightarrow a_{n+1} \in \mathbb{Z}$,

pasi $a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$ dhe $a_1 = a_2 = 1$ dhe $a_3 = 3$.

4. Gjeni të gjitha zgjidhjet e plota të ekuacionit $(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 2(x - y)(1 - xy) = 4(1 + xy)$.

10 pikë

Zgjidhje

Transformojmë ekuacionin e dhënë:

$$\begin{aligned} (x^2 + 1)(y^2 + 1) + 2(x - y)(1 - xy) &= 4(1 + xy) \Leftrightarrow x^2 y^2 - 2xy + 1 + x^2 + y^2 - 2xy + 2(x - y)(1 - xy) = 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (xy - 1)^2 - 2(x - y)(xy - 1) + (x - y)^2 = 4 \Leftrightarrow (xy - 1 - (x - y))^2 = 4 \Leftrightarrow (x + 1)(y - 1) = \pm 2 \end{aligned}$$

Atëherë ka vend: $(x + 1)(y - 1) = 2$, nga ku:

$$\begin{cases} x + 1 = 2 \\ y - 1 = 1 \end{cases} \text{ ose } \begin{cases} x + 1 = 1 \\ y - 1 = 2 \end{cases} \text{ ose } \begin{cases} x + 1 = -2 \\ y - 1 = -1 \end{cases} \text{ ose } \begin{cases} x + 1 = -1 \\ y - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow (1; 2), (-3; 0), (0; 3), (-2; -1)$$

Në rastin kur

$$(x + 1)(y - 1) = -2$$

$$\begin{cases} x + 1 = 2 \\ y - 1 = -1 \end{cases} \text{ ose } \begin{cases} x + 1 = -1 \\ y - 1 = 2 \end{cases} \text{ ose } \begin{cases} x + 1 = -2 \\ y - 1 = 1 \end{cases} \text{ ose } \begin{cases} x + 1 = 1 \\ y - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow (1; 0), (-3; 2), (0; -1), (-2; 3)$$

Të tetë çiftet e renditur të gjetur më sipër kënaqin ekuacionin e dhënë.

5. Le të jenë x, y, z numra realë pozitivë, të tillë që $xy + yz + zx = 1$.

Tregoni se ka vend mosbarazimi $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{y+x} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

10 pikë

Zgjidhje

Duke kryer shndërrimet e njëvlershme të mosbarazimi i kërkuar, mjafton të provojmë:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{y+x} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow (x+y+z) \geq \sqrt{3}$$

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) \geq (xy + yz + xz) + 2(xy + yz + xz) = 3(xy + yz + xz) \geq 3$$

Nga ku është e qartë se $(x+y+z) \geq \sqrt{3}$, për $x, y, z > 0$