

BARKODI



REPUBLIKA E SHQIPËRISË

MINISTRIA E ARSIMIT
QENDRA E SHËRBIMEVE ARSIMOREOLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS
NË ARSIMIN E MESËM TË LARTË

Faza e tretë

14 shkurt 2026

Udhëzime për nxënësin:

- Olimpiada fillon në orën 10:00 dhe mbaron në orën 13:00.
- Testi përmban 5 pyetje.
- Për secilën pyetje është lënë hapësira e nevojshme për të shkruar përgjigjen.

Për përdorim nga komisioni i vlerësimit

Pyetja	1	2	3	4	5
	10 pikë	10 pikë	10 pikë	10 pikë	10 pikë
Pikët e fituara					

Totali i pikëve të fituara

KOMISIONI I VLERËSIMIT

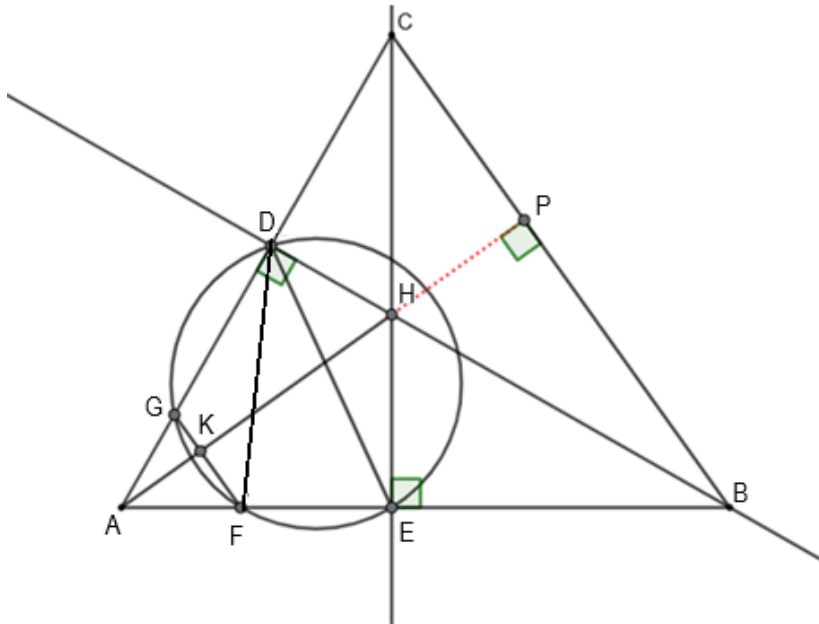
1.....

2.....

1. Vizatoni një trekëndësh këndngushtë ABC. Shënoni me H pikëprerjen e lartësive CE dhe BD përkatësisht mbi brinjët AB dhe AC. Rrethi me diametër DE pret AB dhe AC përkatësisht në pikat F dhe G. Le të jetë K pikëprerja e FG me AH. Gjeni gjatësinë e segmentit AK, nëse $BC=25\text{cm}$, $BD=20\text{cm}$ dhe $BE=7\text{cm}$.

10 pikë

Zgjidhje



Zbatojmë Teoremën e Pitagorës në $\triangle BEC$ dhe $\triangle BDC$ gjejmë: $CE = 24\text{cm}$ dhe $DC = 15\text{cm}$.

Vëmë re që $\triangle ABD \sim \triangle AEC \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{BD}{CE}$. Meqenëse $AB = AE + 7$ dhe $AC = AD + 15$

$$\text{shkruajmë: } \begin{cases} \frac{AD}{AE} = \frac{5}{6} \\ \frac{AE+7}{AD+15} = \frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow AD = 15\text{cm} \text{ dhe } AE = 18\text{cm}.$$

$AB = AE + EB = 25\text{cm} \Rightarrow \triangle ABC$ dybrinjënjëshëm.

Bashkojmë D me F . $DF \perp AE$ ($\angle DFE = 90^\circ$), kështu që DF është vijë e mesme e $\triangle AEC$

$$\Rightarrow DF = 12\text{cm}$$

Në $\triangle ADF$ dhe gjejmë $AF = \frac{AE}{2} = 9\text{cm}$

Meqë pikat G, F, E, D janë ciklike, kemi se edhe pikat D, E, B, C janë ciklike.

Këndet $\angle AFG = \angle ADE = \angle ABC$ pra $GF \parallel BC$, rrjedh që $\triangle AFG \sim \triangle ABC$ nga ku $\frac{AK}{AP} = \frac{AF}{AB}$.

Meqenëse $AP = CE$ barazimi shkruhet $\frac{AK}{CE} = \frac{AF}{AB}$, duke zëvendësuar $\frac{AK}{24} = \frac{9}{25} \Rightarrow AK = 8,64$

2. Jepet vargu numerik $\{x_n\}$ i tillë që $x_1 = x_2 = 1$ dhe $x_{n+2} = \frac{1}{x_{n+1}} + x_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Gjeni kufizën x_{2026} .

10 pikë

Zgjidhje

Nga sekuenca e vargut kemi që $x_{n+2} = \frac{1}{x_{n+1}} + x_n$ nga ku $x_{n+2}x_{n+1} = 1 + x_{n+1}x_n \Rightarrow x_{n+2}x_{n+1} - x_{n+1}x_n = 1$.

Duke shënuar: $y_n = x_{n+1}x_n \Rightarrow y_{n+1} = x_{n+2}x_{n+1}$,

Pra vargu $\{y_n\}$ është një varg aritmetik me ndryshore $d = 1$.

Për $n = 1$ $y_1 = x_2x_1 = 1$

$y_2 = x_3x_2 = 2$ sepse $x_3 = 2$

$y_3 - y_2 = x_4x_3 - x_3x_2 = 2x_4 - 2 = 1$ sepse $x_4 = \frac{3}{2}$

$y_3 = y_2 + 1 = 2 + 1 = 3$ provohet se: $y_n = x_{n+1}x_n = n$ nga ku $x_{n+1} = \frac{n}{x_n} = \frac{n}{\frac{n-1}{x_{n-1}}} = \frac{n}{n-1}x_{n-1}$

$$\begin{aligned} x_{2026} &= \frac{2025}{2024} x_{2024} = \frac{2025}{2024} \cdot \frac{2023}{2022} x_{2022} = \dots = \frac{2025}{2024} \cdot \frac{2023}{2022} \cdot \dots \cdot \frac{5}{4} x_4 = \\ &= \frac{2025}{2024} \cdot \frac{2023}{2022} \cdot \dots \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} x_2 = \frac{2025}{2024} \cdot \frac{2023}{2022} \cdot \dots \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Pra } x_{2026} = \frac{2025}{2024} \cdot \frac{2023}{2022} \cdot \dots \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2}$$

3. Gjeni të gjithë çiftet e renditur $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$, për të cilët ka vend barazimi: $1 + 2^{2x+1} + 2^x = y^2$.

10 pikë

Zgjidhje

Nga barazimi i dhënë kemi $x \geq 0$ dhe $y > 0$ ose $y < 0$

Shqyrtojmë rastin $\begin{cases} x \geq 0 \\ y > 0 \end{cases}$ nëse $x = 0 \Rightarrow y = \pm 2$. Pra kemi zgjidhjet $(0; 2), (0; -2)$.

Nëse $x > 0$ dhe $y > 0$ kuptohet se y -numër tek, atëherë $y = 2n + 1$ nga ku kemi se:

$$2^{2x+1} + 2^x = 4n(n+1) \text{ ose } 2^x(2^{x+1} + 1) = 4n(n+1) \quad (*)$$

Vëmë re se barazimi (*) nuk ka zgjidhje për $x = 1$ ose për $x = 2$ kështu që $y > 2$

Për $x > 2$ pjesëtuesi më i madh i përbashkët $PMP(2^x; 2^{x+1}) = 1$ dhe $PMP(n; n+1) = 1$ kështu që $\frac{4n}{2^x}$

ose $\frac{4n+4}{2^x}$ janë numra natyrorë.

Rasti 1.

$$\text{Shënojmë } \frac{4n}{2^x} = a \Rightarrow a^2 \cdot 2^x + 4a = 8 \cdot 2^x + 4 \Rightarrow a^2 \cdot 2^x - 8 \cdot 2^x = 4 - 4a$$

$$2^x(a^2 - 8) = 4(1 - a)$$

$$2^x = \frac{4(1-a)}{a^2 - 8} \geq 8 \Rightarrow 2a^2 + a - 17 < 0$$

$a = 1$ ose $a = 2$ nuk ka zgjidhje pasi $2^x \geq 8$

Rasti 2.

$$\text{Shënojmë } \frac{4(n+1)}{2^x} = a \Rightarrow 2^x = \frac{4(1+a)}{a^2 - 8} \geq 8 \Rightarrow 2a^2 - a - 17 < 0 \text{ nga ku } a = 1 \text{ ose } a = 2 \text{ ose } a = 3$$

Për $a = 3$ kemi $x = 4$ dhe $y = \pm 23$

Kështu që zgjidhjet janë çiftet: $(4; 23), (4; -23)$

Si përfundim zgjidhjet janë 4 çiftet $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ $(0; 2), (0; -2), (4; 23), (4; -23)$

4. Jepen numrat realë pozitivë, të tillë që $xy + yz + xz = 3$. Proveni se ka vend mosbarazimi:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 3}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + 3}} \leq \frac{3}{2}$$

10 pikë

Zgjidhje

$$\text{Kanë vend barazimet : } \sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{x^2 + xy + yz + xz} = \sqrt{(x + y)(x + z)}$$

Për $x > 0$; $y > 0$; $z > 0$ gjithashtu mund të shkruajmë

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{x}{\sqrt{(x + y)(x + z)}} = \sqrt{\frac{x}{x + y} \cdot \frac{x}{x + z}} \leq \frac{\frac{x}{x + y} + \frac{x}{x + z}}{2} \quad (1) \quad (\text{AM-GM})$$

Veprojmë në të njëjtën mënyrë:

$$\frac{y}{\sqrt{y^2 + 3}} = \frac{y}{\sqrt{(x + y)(y + z)}} = \sqrt{\frac{y}{x + y} \cdot \frac{y}{y + z}} \leq \frac{\frac{y}{x + y} + \frac{y}{y + z}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{z}{\sqrt{z^2 + 3}} = \frac{z}{\sqrt{(x + z)(y + z)}} = \sqrt{\frac{z}{x + z} \cdot \frac{z}{y + z}} \leq \frac{\frac{z}{x + z} + \frac{z}{y + z}}{2} \quad (3)$$

Mbledhim anë për anë barazimet (1) (2) (3) dhe kemi:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 3}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + 3}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x + y} + \frac{x}{x + z} + \frac{y}{x + y} + \frac{y}{y + z} + \frac{z}{x + z} + \frac{z}{y + z} \right) = \frac{1}{2} (1 + 1 + 1) = \frac{3}{2}$$

5. Gjeni funksionin numerik $f : R \rightarrow R$, i cili plotëson kushtin $f[x + f(y)] = f(x) + y, \forall x, y \in R$.

10 pikë

Zgjidhje

$$\text{Për } x = 0 \text{ barazimi i dhënë ka trajtën } f[f(y)] = f(0) + y \quad (1)$$

$$\text{Zëvendësojmë } y = 0 \Rightarrow f[x + f(0)] = f(x) \quad (2)$$

Barazimi (2) tregon se funksioni i kërkuar është periodik me periodë $T = f(0)$.

Nga barazimi (1), vëmë re se ana e djathtë varet nga y , dhe kjo është e mundur vetëm nëse:

$$f(0) = 0$$

Për $f(0) = 0$, barazimi (1) merr formën $f[f(y)] = y$

Kjo tregon se funksioni f është bijektiv dhe ka funksion të anasjelltë.

Nëse zëvendësojmë $x = f(a)$ barazimi i dhënë merr trajtën: $f[f(a) + f(y)] = f[f(a)] + y$

dhe meqenëse $f[f(a)] = a$ atëherë $f(a + y) = a + y$.

Pra për çdo $x \in R$, $f(x) = x$

Shënim. Llogaritjet dhe veprimet e kryera në faqet në vazhdim, nuk do të vlerësohen nga komisioni i vlerësimit.

