

BARKODI



REPUBLIKA E SHQIPËRISË

MINISTRIA E ARSIMIT
QENDRA E SHËRBIMEVE ARSIMOREOLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS
NË ARSIMIN E MESËM TË ULËT

Faza e tretë

14 shkurt 2026

Udhëzime për nxënësin:

- Olimpiada fillon në orën 10:00 dhe mbaron në orën 13:00.
- Testi përmban 5 pyetje.
- Për secilën pyetje është lënë hapësira e nevojshme për të shkruar përgjigjen.

Për përdorim nga komisioni i vlerësimit

Pyetja	1	2	3	4	5
	10 pikë	10 pikë	10 pikë	10 pikë	10 pikë
Pikët e fituara					

Totali i pikëve të fituara

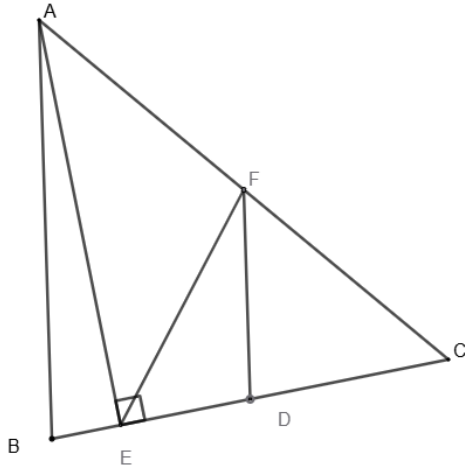
KOMISIONI I VLERËSIMIT

1.....

2.....

1. Në trekëndëshin këndngushtë ABC shënoni me D mesin e brinjës BC dhe me E këmbën e lartësisë mbi BC. Le të jetë $AB=12$ cm, $DE=6$ cm dhe $m(\hat{ACB}) = \gamma$. Proveni se $m(\hat{ABC}) = 2\gamma$. **10 pikë**

Zgjidhje



Shënojmë me F mesin e brinjës AC. Bashkojmë pikën D me F .

DF është vijë e mesme për $\triangle ABC \Rightarrow DF \parallel AB$ nga ku rrjedh se $DF = 6$ cm pra

$DF = DE \Rightarrow \triangle DEF$ është dybrinjënjëshëm dhe $\hat{FED} = \hat{EFD}$ dhe $\hat{FDC} = \hat{ABC}$ por $\hat{FDC} = 2\hat{FED}$

$\triangle EFC$ është dybrinjënjëshëm, kështu që $\hat{FEC} = \hat{ECF}$ pra $\hat{ABC} = 2\hat{FEC} = 2\hat{ACB}$ pra

$m(\hat{ABC}) = 2\gamma$

2. Katër numra të thjeshtë x, y, z dhe t janë të tillë që: $x < y < z < t$. Gjeni këta numra, nëse dihet se $xy + yz + zt + tx = 882$. Sa zgjidhje ka kjo situatë? **10 pikë**

Zgjidhje

Një nga numrat e dhënë është 2 sepse

$y(x+z) + t(x+z) = (x+z)(y+t) = 882 = 2 \cdot 3^2 7^2$ nuk plotpjesëtohet me 4 $\Rightarrow$ njëri nga numrat është 2 pra $x = 2$.

$$882 = (2+z)(y+t) > (2+z)(2+z) > (z+2)^2 \Rightarrow z+2 < 30 \Rightarrow z+2 = 7 \text{ ose } z+2 = 9 \text{ ose } z+2 = 21$$

Nëse $z = 5 \Rightarrow y = 3; t = 123$ numër jo i thjeshtë.

Nëse $z = 7 \Rightarrow y = 3 \text{ ose } y = 5 \Rightarrow t = 93 \text{ ose } t = 95$ numra jo të thjeshtë.

Nëse $z = 19 \Rightarrow y+t = 42 \Rightarrow y < 19 \Rightarrow y = 5 \text{ ose } y = 11 \text{ ose } y = 13$ dhe $t = 37 \text{ ose } t = 31 \text{ ose } t = 29$

Pra zgjidhjet janë $(x, y, z, t) = (2; 5; 19; 37), (2; 11; 19; 31), (2; 13; 19; 29)$

3. Jepen numrat realë x, y, z të tillë që: $0 < x < 1$; $0 < y < 1$; $0 < z < 1$ dhe $x + y + z = 2$.

Vërtetoni mosbarazimin $(\frac{x}{1-x})(\frac{y}{1-y})(\frac{z}{1-z}) \geq 8$.

10 pikë

Zgjidhje

Zëvendësojmë $1 - x = a$; $1 - y = b$; $1 - z = c$ dhe marrim $a + b + c = 3 - (x + y + z) = 1$

Nga ana tjetër kemi se: $x = 1 - a = b + c$; $y = a + c$; $z = a + b$

Pra rrjedh se $(\frac{x}{1-x})(\frac{y}{1-y})(\frac{z}{1-z}) = \frac{b+c}{a} \cdot \frac{a+c}{b} \cdot \frac{a+b}{c} \geq \frac{2\sqrt{bc}2\sqrt{ac}2\sqrt{ab}}{abc} = 8$

4. Të zgjidhet sistemi i ekuacioneve
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2x}} + \sqrt{2 - \frac{1}{2y}} = 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2y}} + \sqrt{2 - \frac{1}{2x}} = 2 \end{cases}$$
 10 pikë

Zgjidhje

Zëvendësojmë $a = \frac{1}{2x}$ dhe $b = \frac{1}{2y}$, atëherë :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2x}} + \sqrt{2 - \frac{1}{2y}} = 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2y}} + \sqrt{2 - \frac{1}{2x}} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} + \sqrt{2-b} = 2 \\ \sqrt{b} + \sqrt{2-a} = 2 \end{cases}$$

Zbresim anë për anë $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{2-a} - \sqrt{2-b}$

Nëse $a > b$ barazimi nuk qëndron pasi dy anët e barazimit janë me shenjë të kundërt.

Njëlloj $a < b$ nuk qëndron pasi dy anët e barazimit janë me shenjë të kundërt.

Pra $a = b$ duke zëvendësuar në njërin nga ekuacionet e sistemit marrim $\sqrt{a} + \sqrt{2-a} = 2$, duke ngritur në katror të dy anët kemi $2\sqrt{a(2-a)} = 2 \Rightarrow a(2-a) = 1$.

Pra $a = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ dhe $y = \frac{1}{2}$. Zgjidhje e sistemit është $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

5. Agimi dhe Blerta do të kryejnë një punë. Të dy së bashku e përfundojnë këtë punë për 6 ditë. Nëse Agimi punon i vetëm 4 ditët e para dhe më pas i bashkohet Blerta, atëherë kjo punë përfundon për 7 ditë gjithsej. Për sa ditë do e përfundonte këtë punë secili, nëse do të punonte i vetëm?

10 pikë

Zgjidhje

x pjesa e punës së Agimit në një ditë, y pjesa e punës së Blertës në një ditë.

$$\text{Kemi } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \quad (1)$$

Agimi punoi i vetëm 4 ditët e para, duke kryer $\frac{4}{x}$ pjesë të punës. Më pas ata punuan edhe 3 ditë, së bashku, për ta përfunduar punën. Nga kushti, për tre ditë së bashku ata kryejnë $\frac{1}{2}$ e punës.

$$\text{Pra } \frac{4}{x} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x = 8 \quad \text{Duke zëvendësuar në barazimin (1) kemi: } y = \frac{1}{\frac{1}{8} + \frac{1}{y}} = \frac{1}{6} \Rightarrow y = 24$$

Pra Agimi i vetëm e kryen këtë punë për 8 ditë, ndërsa Blerta e vetme për 24 ditë.

