OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS
NË ARSIMIN E MESËM TË ULËT

Faza e tretë **15 shkurt 2025**

ZGJIDHJET

1. Gjeni zgjidhjet e plota të sistemit $\begin{cases} x^2+6y^2=5xy \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$ **10 pikë**

Zgjidhje e ushtrimit 1:

Për $x \neq 0$ *dhe* $y \neq 0$: $\begin{cases} x^2+6y^2=5xy \\ x^2+y^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^2-\dfrac{5x}{y}+6=0 \\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^2+1=\dfrac{10}{y^2} \end{cases}$

Zëvendësojmë

$$\frac{x}{y}=t \Rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^2-\dfrac{5x}{y}+6=0 \\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^2+1=\dfrac{10}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-5t+6=0 \\ t^2+1=\dfrac{10}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-2)(t-3)=0 \\ t^2+1=\dfrac{10}{y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1=2 \text{ } ose \text{ } t_2=3 \\ t^2=\dfrac{10}{y^2}-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} t_1=2 \\ t^2=\dfrac{10}{y^2}-1 \end{cases} ose \begin{cases} t_2=3 \\ t^2=\dfrac{10}{y^2}-1 \end{cases} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} t_1=2 \\ y=\mp\sqrt{2} \end{cases} \text{ ose } \begin{cases} t_2=3 \\ y=\mp 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\mp 1 \\ x=\mp 3 \end{cases}$$

Kështu që:
Zgjidhjet e plota të sistemit janë çiftet e numrave: $(3;1), (-3;-1)$.

2. Një autobus e kryen itinerarin e tij me shpejtësi konstante V.
Një ditë ai u nis 12 minuta me vonesë nga stacioni.
Për të rikuperuar këtë vonesë, ai e rriti shpejtësinë me $20\ km/orë$ në 6 kilometrat e parë, dhe më pas vazhdoi të përshkojë rrugën e mbetur me shpejtësinë e mëparshme.
Gjeni shpejtësinë V, me të cilën autobusi përshkon zakonisht itinerarin e tij.
Jepni përgjigjen tuaj në kilometrin më të afërt. **10 pikë**

Zgjidhje e ushtrimit 2:

V është shpejtësia me të cilën autobusi përshkon zakonisht itinerarin e tij.

$(V+20)\ km/orë$ shpejtësia e rritur.

Me shpejtësinë e fillimit V, koha për të përshkuar 6 km e parë është: $t_1 = \frac{6}{V} orë$.

Me shpejtësinë e rritur, koha për të përshkuar 6 km e parë, është: $t_2 = \frac{6}{V+20} orë$

Vonesa e shprehur në orë është: $t = 12\min = 0,2 orë = t_1 - t_2$.

Nga ku:

$$\frac{6}{V} - \frac{6}{V+20} = 0,2 \Leftrightarrow \frac{6(V+20)-6V}{V(V+20)} = 0,2 \Leftrightarrow \frac{120}{V^2+20V} = 0,2 \Leftrightarrow 0,2V^2 + 4V - 120 = 0$$

$$\Leftrightarrow V^2 + 20V - 600 = 0$$

$$_1V_2 = \frac{-20 \pm \sqrt{2800}}{2} = \left(-10 \pm 10\sqrt{7}\right) km/orë$$

Zgjidhje e situatës së dhënë është vlera pozitive e V:

$$V = \left(10\sqrt{7} - 10\right) km/orë \approx 16,46 km/orë \approx 16 km/orë$$

3. Provoni se $5-\left(\sqrt[4]{5}+\sqrt[3]{5}+\sqrt{5}\right)<0$. **10 pikë**

Zgjidhje e ushtrimit 3:

Provojmë se: $\sqrt[4]{5}+\sqrt[3]{5}+\sqrt{5}-5>0 \Leftrightarrow \sqrt[4]{5}+\sqrt[3]{5}+\sqrt{5}>5$.

Vërtetë:

$$\sqrt{5}>\sqrt{4} \Rightarrow \sqrt{5}>2 \qquad (1)$$

$$3^3 \times 5 > 5^3 \Rightarrow 3\times\sqrt[3]{5}>5 \Rightarrow \sqrt[3]{5}>\frac{5}{3} \qquad (2)$$

$$3^4 \times 5 > 4^4 \Rightarrow 3\times\sqrt[4]{5}>4 \Rightarrow \sqrt[4]{5}>\frac{4}{3} \qquad (3)$$

Mbledhim anë për anë të tre mosbarazimet e mësipërme:

$$(1)+(2)+(3) \;\Leftrightarrow\; \sqrt[4]{5}+\sqrt[3]{5}+\sqrt{5}>2+\frac{5}{3}+\frac{4}{3} \;\Leftrightarrow\; \sqrt[4]{5}+\sqrt[3]{5}+\sqrt{5}>5.$$

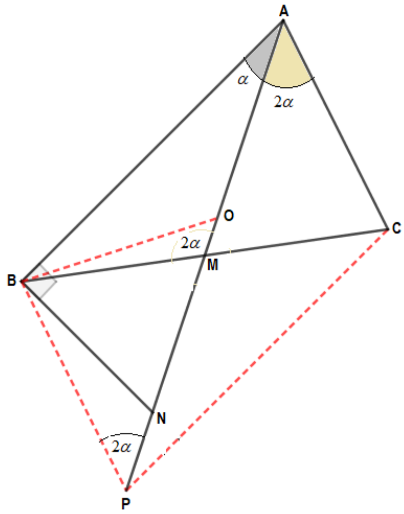
4. Jepet trekëndëshi këndngushtë ΔABC.

Mesorja AM e hequr nga kulmi i këndit $B\hat{A}C$, cakton tek ky i fundit dy kënde, masat e të cilëve rrinë në raportin $1:2$.

Në zgjatimin e AM, përtej pikës M, merret pika N, e tillë që $m\left(A\hat{B}N\right)=90^0$

Tregoni se $AN=2AC$. **10 pikë**

Zgjidhje e ushtrimit 4:



Shënojmë $m\left(B\hat{A}M\right)=\alpha \; dhe \; m\left(M\hat{A}C\right)=2\alpha$.

Në zgjatimin e AN përtej pikës N, marrim pikën P, të tillë që $AM=MP$.

Meqenëse $BM=MC$, atëherë katërkëndëshi $ABPC$ është paralelogram, pasi diagonalet e tij përgjysmojë njëra - tjetrën.

Kështu që kemi $BP=AC \; dhe \; AB=PC$

Shënojmë me O, mesin e segmentit AN. Kjo do të thotë se BO është mesorja mbi hipotenuzë e trekëndëshit kënddrejtë ΔABN. Rrjedhimisht kemi

$BO=\frac{1}{2}AN \Rightarrow BO=AO$.

Kështu që trekëndëshi ΔBOA është dybrinjënjëshëm dhe $m\left(O\hat{B}A\right)=m\left(B\hat{A}O\right)=\alpha$.

Nga ana tjetër, këndi $B\hat{O}P$ është kënd i jashtëm i trekëndëshit ΔABO, kështu që

$m\left(B\hat{O}P\right)=m\left(O\hat{B}A\right)+m\left(B\hat{A}O\right)=2\alpha$.

Kemi: $m\left(B\hat{P}O\right)=m\left(P\hat{A}C\right)=2\alpha$ (si kënde ndërrues të brendshëm të paralelogramit $ABPC$)

Pra ΔPOB është dybrinjënjëshëm $\left(BO=PB\right)$.

Kemi: $BO=\frac{1}{2}AN \; dhe \; BO=BP=AC \Rightarrow AC=\frac{1}{2}AN \Rightarrow AN=2AC$.

5. Dihet se $\left(a^2+2ab+4b^2\right)$ plotpjesëtohet me $(a+2b)$.

Provoni se $\left(a^4+16b^4\right)$ plotpjesëtohet me $(a+2b)^2$. **10 pikë**

Zgjidhje e ushtrimit 5:

Zëvendësojmë $2b=c$, atëherë do të provojmë:

Nëse $\left(a^2+ac+c^2\right)\vdots(a+c)\Rightarrow\left(a^4+c^4\right)\vdots(a+c)^2$.

Kemi: $\left(a^2+ac+c^2\right)=(a+c)^2-ac\Leftrightarrow ac=(a+c)^2-\left(a^2+ac+c^2\right)$

dhe $\left(a^2+c^2\right)=(a+c)^2-2ac$.

Rrjedhimisht $\left(a^2+c^2\right)\vdots(a+c)\ dhe\ ac\vdots(a+c)$.

Nga ana tjetër kemi që:

$$\underbrace{\left(a^4+c^4\right)=\left(a^2+c^2\right)^2-2(ac)^2\Rightarrow\left(a^4+c^4\right)\vdots(a+c)^2}_{\left(a^2+c^2\right)\vdots(a+c)\ dhe\ ac\vdots(a+c)\Rightarrow\left(a^2+c^2\right)^2\vdots(a+c)^2\ dhe\ (ac)^2\vdots(a+c)^2}.$$

Shënim: Pranohet çdo zgjidhje tjetër e saktë, e cila nuk është parashikuar më lart, por që komisioni i vlerësimit e gjykon si të tillë.