OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS

NË ARSIMIN E MESËM TË LARTË

Faza e tretë **15 shkurt 2025**

ZGJIDHJET

1. Dy rrathë ω_1 dhe ω_2, me qendër përkatësisht në pikat O_1 dhe O_2, i kanë rrezet e tyre me gjatësi përkatësisht $R_1 = 1cm$ dhe $R_2 = \sqrt{2}cm$.

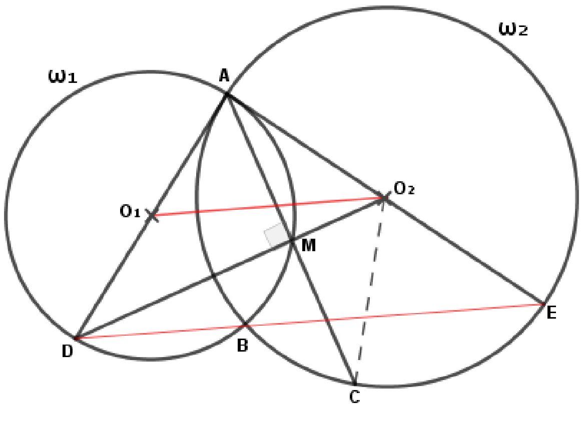
Këta rrathë priten në pikat A dhe B, në mënyrë të tillë që $O_1O_2 = 2\ cm$.

Nga pika A ndërtohet diametri AD në rrethin ω_1 dhe diametri AE në rrethin ω_2.

Segmenti DO_2 pret rrethin ω_1 në pikën M. Zgjatimi i AM, përtej pikës M, pret rrethin ω_2 në pikën C.

Gjeni gjatësinë e segmentit AC. **10 pikë**

Zgjidhje e ushtrimit 1:



Qendrat e O_1 dhe O_2 të rrathëve të dhënë, janë përkatësisht meset e brinjëve AD dhe AE të ΔADE, rrjedhimisht O_1O_2 është vijë e mesme e ΔADE. Kështu që $DE = 2O_1O_2 = 4\ cm$.

$m\left(A\hat{M}D\right) = 90^0$, si kënd rrethor që hapet në diametrin AD të ω_1.

Pra O_2M është lartësi mbi bazën e trekëndëshit dybrinjënjëshëm ΔAO_2C, $\left(AO_2 = CO_2 = R_2\right)$.

Pra O_2M është gjithashtu mesore e ΔAO_2C, ndaj $AC = 2AM$.

Nga ana tjetër AM është lartësi mbi bazën e trekëndëshit ΔADO_2, rrjedhimisht kemi:

$$S_{\Delta ADO_2} = \frac{AM \times DO_2}{2} \Leftrightarrow AM = \frac{2S_{\Delta ADO_2}}{DO_2} \qquad (*).$$

Por $2S_{\Delta ADO_2} = S_{\Delta ADE}$ dhe nga formula e Heronit kemi:

$$S_{\Delta ADE} = \sqrt{p(p-a)(p-a)(p-a)},\ ku\ p = \frac{a+b+c}{2};\ a = 2cm;\ b = 2\sqrt{2}cm;\ c = 4cm$$

$$S_{\Delta ADE} = \sqrt{\left(3+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)} = \sqrt{7}cm^2 \Rightarrow S_{\Delta ADO_2} = \frac{\sqrt{7}cm^2}{2} \qquad (**).$$

Nga $(*)$ kemi se $AM = \frac{\sqrt{7}}{DO_2}$. Për gjetjen e DO_2, zbatojmë teoremën e kosinusit dhe rrjedhimet e saj në trekëndëshat $\Delta ADO_2\ dhe\ \Delta ADE$.

Kemi:

$$\cos\left(D\hat{A}E\right) = \frac{AD^2 + AE^2 - DE^2}{2AD \times AE} = \frac{-\sqrt{2}}{4}$$

$$\left(DO_2\right)^2 = AD^2 + \left(AO_2\right)^2 - 2AD \times \left(AO_2\right) \times \cos\left(D\hat{A}E\right)$$

$$DO_2 = 2\sqrt{2}\ cm$$

Duke zëvendësuar tek $(*)$ dhe $(**)$ gjejmë:

$$AM = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow AC = 2 \times \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}}\ cm.$$

2. Provoni se për çdo tri numra realë pozitivë $x,\ y,\ z$, të tillë që $xyz=1$, ka vend mosbarazimi

$$\sqrt[5]{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \le \frac{x+y+z}{3}.$$

10 pikë

Zgjidhje e ushtrimit 2:

Do provojmë se ka vend mosbarazimi $\sqrt[5]{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \le \frac{x+y+z}{3}$.

Duke ruajtur trajtën homogjene të mosbarazimit të dhënë, do provojmë se:

$$\sqrt[5]{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \le \frac{x+y+z}{3} \Leftrightarrow (x+y+z)^5 \ge 81xyz\left(x^2+y^2+z^2\right),\ \forall x,y,z \in R^{*+}$$

Shfrytëzojmë mosbarazimin e vërtetë:

$(xy+yz+zx)^2 = (xy)^2+(yz)^2+(zx)^2+2xyz(x+y+z) \ge 3xyz(x+y+z)$, pra

$(xy+yz+zx)^2 \ge 3xyz(x+y+z)$

Nga ku: $(x+y+z) \le \dfrac{(xy+yz+zx)^2}{3xyz}$ $\qquad (1)$

Duke pasur parasysh (1) mjafton të provojmë se:

$(x+y+z)^6 \ge 27xyz(xy+yz+zx)^2\left(x^2+y^2+z^2\right)$ $\qquad (2)$

Zëvendësojmë tek mosbarazimi më sipër: $A=x+y+z$ *dhe* $B=xy+yz+zx$ prej nga përftojmë:

$(x+y+z)^6 - 27xyz(xy+yz+zx)^2\left(x^2+y^2+z^2\right) = A^6-27B^2\left(A^2-2B\right) = \left(A^2-3B\right)^2\left(A^2+6B\right) \ge 0$.

Nga vërtetësie e mosbarazimeve (1) *dhe* (2) kemi se $(x+y+z)^5 \ge 81xyz\left(x^2+y^2+z^2\right),\ \forall x,y,z \in R^{*+}$

Vihet re se barazimi arrihet kur $x=y=z=1$.

3. Le të jenë $a,\ b$ dy numra të plotë pozitivë, të tillë që $a>1$.

Duke shqyrtuar pjesëtuesit më të mëdhenj të përbashkët (PMP) për çiftet e numrave

$(a-1\,;\,b)$ dhe $\left(\dfrac{a^b-1}{a-1}\ ;\,a-1\right)$, vërtetoni se $PMP(a-1\,;\,b)=PMP\left(\dfrac{a^b-1}{a-1}\ ;\,a-1\right)$. **10 pikë**

Zgjidhje e ushtrimit 3:

Shënojmë: $c=PMP\left(\dfrac{a^b-1}{a-1}\ ;\,a-1\right)\ dhe\ d=PMP\,(a-1\,;\,b)$.

Për çdo $a\in N\,/\,a>1$, vëmë re se thyesa $\dfrac{a^b-1}{a-1}$ paraqet shumën e $b-$kufizave të para të vargut gjeometrik me kufizë të parë 1 dhe herës a. Pra mund të shkruajmë:

$$\frac{a^b-1}{a-1}=\left(1+a+a^2+\ldots+a^{b-2}+a^{b-1}\right)=\underbrace{\left(a^{b-1}-1\right)+\left(a^{b-2}-1\right)+\ldots(a-1)}_{(b-1)\ kufiza}+b \qquad (*)$$

Meqenëse c është pjesëtues i $a-1$ dhe nga ana tjetër $a-1$ është pjesëtues i a^k-1, për çdo $k=1;2;3;\ldots;\ b-1$, atëherë c është pjesëtues i shumës $\left(a^{b-1}-1\right)+\left(a^{b-2}-1\right)+\ldots+(a-1)$.

Meqenëse$(a-1)\vdots c,\ b\vdots c\ dhe\ d=PMP\,(a-1\,;\,b)$, atëherë $d\geq c$.

Nga ana tjetër, meqë $(a-1)\vdots d\ \ dhe\ b\vdots d$, nga barazimi $(*)$ njësoj kemi se $\dfrac{a^b-1}{a-1}\vdots d$.

Por meqë $(a-1)\vdots d\ dhe\ \dfrac{a^b-1}{a-1}\vdots d$, atëherë $d\leq c$.

Si përfundim meqenëse $c\leq d\ \ dhe\ d\leq c\Leftrightarrow c=d$, pra $PMP\left(\dfrac{a^b-1}{a-1}\ ;\,a-1\right)=PMP(a-1\,;\,b)$.

4. Gjeni sa numra *5-shifrorë* mund të formohen, me kusht që secili prej tyre të gëzojë këto veçori:
- të ketë grupin shifror ''*15''* në përbërje të tij;
- të jetë shumëfish i *15*-ës. Numra të tillë janë si p.sh: 5*34**15*** ose *3**15**45.* **10 pikë**

Zgjidhje e ushtrimit 4:

Që një numër të jetë i pjesëtueshëm me *15*, duhet dhe mjafton që ai të jetë i pjesëtueshëm me *3* dhe *5*. Ndërtojmë kategoritë e numrave *5-shifrorë* të cilët plotpjesëtohen me 5, pra përfundojnë me 5 ose 0, si dhe që kanë bllokun dyshifror 15 në ''trup'':

(1) abc15
(2) ab150
(3) ab155
(4) a15b0
(5) a15b5
(6) 15ab0
(7) 15ab5

Ku $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in \{0,1,2...9\}$

Duke pasur parasysh që çdo numër i secilës kategori të përshkruar më sipër duhet të jetë i pjesëtueshëm edhe me *3*, numërojmë elementët e secilës kategori:

(1): Fillimisht kuptohet që për këtë kategori, $a \neq 0$ dhe që numrat e trajtës ***abc15*** të plotpjesëtohen me *15* duhet dhe mjafton që 3-shifrorët **abc** të jenë të pjesëtueshëm me 3, ndaj $abc \in \left\{ \underbrace{102,105,108,...999}_{\text{var } g \ aritmetik: a_n = 3n+99=999, \text{ ku } (n=300)} \right\}$, pra gjithsej kemi **300** numra në këtë kategori.

(2): Në këtë kategori çdo numër i trajtës ***ab150*** është i pjesëtueshëm me 15, atëherë dhe vetëm atëherë nëse 2-shifrorët ab janë të pjesëtueshëm me 3, ndaj kemi: $ab \in \{12,15,18,...99\}$, pra gjithsej **30** numra .

Për numërimin e elementeve *(numrave 5-shifrorë)* të kategorive **(3), (4), (5)**, arsyetojmë si për kategorinë **(2)**. Pra secila prej kategorive **(3), (4), (5),** për analogji, përmban nga **30**-elementë.

(6) Arsyetojmë tani mbi numrin e *5-shifrorëve* të trajtës ***15ab0***. Si në rastin **(2),** vetëm se në këtë rast shifra ***a*** mund të marrë edhe vlerën ***0.*** Gjithashtu dy shifrorët ab duhet të jenë të pjesëtueshëm me *3*.

Pra $ab \in \{00,03,06,...99\}$, që do të thotë se kjo kategori përmban ***34***-elementë $(3n-3=99 \Leftrightarrow n=34)$.

(7) Që *5-shifrorët* e trajtës ***15ab5*** të kenë *3-in* pjesëtues, duhet dhe mjafton që shuma e shifrave të jetë shumëfish i *3-it.* Kështu që dyshifrorët ab duhet të jenë të trajtës: $ab \in \{01,04,07,...97\}$, çka do të thotë se kjo kategori përmban ***33****-elementë.*

Përpara se të gjejmë numrin e përgjithshëm të ***5-shifrorëve*** të kërkuar, diskutojmë për elementë të përbashkët mes kategorive (pra numrat, të cilët i kemi numëruar dy herë). Bëjmë këtë kontroll për çdo dy prej kategorive të përshkruara më sipër.

Vëmë re se kategoria **(1)** nuk ka asnjë element të përbashkët me kategoritë **(2), (4)** apo **(6),** pasi ndryshojnë nga *shifra e fundit*.

Gjithashtu prerja e kategorive **(1)** dhe **(3)** është boshe (ϕ), pasi elementët e tyre ndryshojnë *në shifrën e katërt.*

Numri *5-shifror* që ndodhet si në kategorinë **(1)** ashtu dhe në kategorinë **(5)** ka trajtën a1515, i cili është i pjesëtueshëm me 3 atëherë dhe vetëm atëherë nëse $a \in \{3,6,9\}$. Pra këto dy kategori kanë **3-**elementë të përbashkët.
Numrat *5-shifrorë* që ndodhen si në kategorinë **(1)** dhe në kategorinë **(7)** kanë trajtën **15c15**, dhe janë të pjesëtueshëm me 3 atëherë dhe vetëm atëherë nëse $c \in \{0,3,6,9\}$. Pra këto dy kategori kanë **4-**elementë të përbashkët.
Shohim prerjen e kategorisë ***(2)*** me kategoritë ***(4)*** dhe ***(6).*** Kategoritë ***(2)*** dhe ***(4)*** ndryshojnë nga *shifra e tretë*, pra prerja e tyre është (ϕ). Mes kategorisë ***(2)*** dhe ***(6)*** kemi vetëm ***1****-element* të përbashkët, i cili është ***15150***.

Kategoritë ***(3)*** dhe ***(5)*** ndryshojnë nga *shifra e tretë*, pra prerja e tyre është (ϕ). Mes kategorive ***(3)*** dhe ***(7)*** kemi vetëm ***1****-element* të përbashkët, i cili është *15155,* por ky nuk plotpjesëtohet me *3,* ndaj nuk e marrim në konsideratë.
Kategoritë ***(4)*** dhe ***(6)*** ndryshojnë nga *shifra e dytë*, pra prerja e tyre është (ϕ).

Kategoritë ***(5)*** dhe ***(7)*** ndryshojnë nga *shifra e dytë*, pra prerja e tyre është (ϕ).

Si përfundim numri i saktë i të gjithë numrave 5-shifrorë që përmbajnë grupin e shifrave ***15*** në trup dhe që plotpjesëtohen me ***15***, është:

$$
\begin{aligned}
&(300+4\times30+34+33)-(3+4+1)= \\
&=487-8= \\
&=479\ numra
\end{aligned}
$$

5. Jepet funksioni $y = f(x)$ i përcaktuar në $]0;+\infty[$.

Provoni se, nëse $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=2^x+2^{\frac{1}{x}}$, atëherë funksioni i dhënë merr vlerën më të vogël për $x=1$.

10 pikë

Zgjidhje e ushtrimit 5:

Funksioni $y = f(x)$ është i vazhdueshëm $\forall x \in]0;+\infty[$.

Nga të dhënat kemi: $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=2^x+2^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=2^{\frac{1}{x}}+2^x$

Ndërtojmë sistemin:

$$\begin{cases} f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=2^x+2^{\frac{1}{x}} \\ f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=2^{\frac{1}{x}}+2^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=2^x+2^{\frac{1}{x}} \\ 2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=2^{\frac{1}{x}}+2^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=2^x+2^{\frac{1}{x}} \\ -4f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=-\left(2\times 2^{\frac{1}{x}}+2\times 2^x\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=2^x+2^{\frac{1}{x}} \\ -4f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=-2\left(2^{\frac{1}{x}}+2^x\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=2^x+2^{\frac{1}{x}} \\ -3f(x)=-\left(2^{\frac{1}{x}}+2^x\right) \end{cases}$$

Pra funksioni ynë ka formulën: $f(x)=\frac{1}{3}\left(2^{\frac{1}{x}}+2^x\right)$

Gjejmë derivatin e funksionit.

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left(2^{\frac{1}{x}}+2^x\right)'=\frac{1}{3}\left(2^{u(x)}+2^x\right)'=\frac{1}{3}\left(u(x)'2^{u(x)}+\left(2^x\right)'\right)=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{x^2}\ln 2\times 2^{\frac{1}{x}}+2^x\ln 2\right)$$

$$f'(x)=\frac{\ln 2}{3x^2}\left(x^2 2^x-2^{\frac{1}{x}}\right)$$

Shohim se $f'(1)=\frac{\ln 2}{3}(2-2)=0$, pra funksioni ka ekstremum në intervalin e shqyrtimit.

Studiomë shenjën e derivatit të funksionit për $x \neq 1$:

Kuptohet se $\frac{\ln 2}{3x^2} > 0, \forall x \in \left]0;1\right[$, ndaj mjafton të shohim shenjën e $x^2 2^x - 2^{\frac{1}{x}}$.

Shohim se: $\forall x \in \left]0;1\right[\Rightarrow \frac{1}{x} > 1 \Rightarrow x^2 2^x < 2^x < 2^{\frac{1}{x}} \Rightarrow x^2 2^x - 2^{\frac{1}{x}} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

Shohim se: $\forall x \in \left]1;+\infty\right[\Rightarrow \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow x^2 2^x > 2^x > 2^{\frac{1}{x}} \Rightarrow x^2 2^x - 2^{\frac{1}{x}} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

Si përfundim, treguam se për $x=1$ funksioni i dhënë ka minimum të vetëm, rrjedhimisht ai merr aty vlerën më të vogël.

Shënim: Pranohet çdo zgjidhje tjetër e saktë, e cila nuk është parashikuar më lart, por që komisioni i vlerësimit e gjykon si të tillë.