REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
DHE SPORTIT

QENDRA E SHËRBIMEVE ARSIMORE

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS
NË ARSIMIN E MESËM TË LARTË

Faza e dytë

Klasa 11 **05 dhjetor 2024**

1. Gjeni vlerën e shprehjes $\frac{(ab)^3}{a^9+b^9-2^3}$, nëse dihet se për çdo $a,b\in R$ ka vend barazimi $a^2-ab+b^2=\frac{2}{a+b}$. **10 pikë**

Zgjidhja.

Nga kushti kemi të vërtetë barazimin $(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=2$, kështu që:

$(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=2 \Leftrightarrow a^3+b^3=2$

Nga ku: $a^9+b^9=\left(a^3+b^3\right)^3-3a^3b^3\left(a^3+b^3\right)=2^3-6(ab)^3$

Pra

$a^9+b^9=2^3-6(ab)^3 \Rightarrow a^9+b^9-2^3=-6(ab)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{(ab)^3}{a^9+b^9-2^3}=-\frac{1}{6}$

2. Numri natyror n ndodhet midis dy katrorëve të plotë të njëpasnjëshëm.
Më i vogli prej këtyre dy katrorëve të plotë, përftohet duke i zbritur k numrit n.
Më i madhi prej këtyre dy katrorëve të plotë përftohet duke i shtuar l numrit n.
Provoni se numri $n-k\times l$ është një katror i plotë. **10 pikë**

Zgjidhja:

Shënojmë m numrin natyror të tillë që: $\mathrm{m}^2 < n < (m+1)^2$

Nga kushti kemi: $\mathrm{m}^2 = n-k \Rightarrow k = n-\mathrm{m}^2$ dhe $(\mathrm{m}+1)^2 = n+l \Rightarrow l = (\mathrm{m}+1)^2 - n$

Atëherë shohim numrin $n-k\times l$:

$$
\begin{aligned}
n-k\times l &= n-\left(n-\mathrm{m}^2\right)\left[(\mathrm{m}+1)^2-n\right] = \\
&= n-n(\mathrm{m}+1)^2+n^2+m^2(\mathrm{m}+1)^2-nm^2 = \\
&= n^2+n\left[1-(\mathrm{m}+1)^2-m^2\right]+m^2(\mathrm{m}+1)^2 = \\
&= n^2+n\left(1-2m^2-2m-1\right)+m^2(\mathrm{m}+1)^2 = \\
&= n^2-2mn(m+1)+\left[m(\mathrm{m}+1)\right]^2 = \\
&= \left[n-m(m+1)\right]^2
\end{aligned}
$$

ç' donim të provonim.

3. Jepet vargu numerik $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, a_{n+1} \ldots$, i tillë që $\forall n \in N,\ a_n \in N$. Nëse $a_1 = 1$ dhe për çdo $n,\ m \in N$ ka vend barazimi $a_{n+m} = a_n + a_m + nm$, gjeni formulën e vargut. **10 pikë**

Zgjidhja:

Në barazimin e dhënë $a_{n+m} = a_n + a_m + nm$, po të marrim $m=1$, kemi:

$$
\begin{aligned}
a_{n+m} = a_n + a_m + nm \Leftrightarrow a_{n+1} &= a_n + a_1 + n \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow a_{n+1} - a_1 &= a_n + n
\end{aligned}
$$

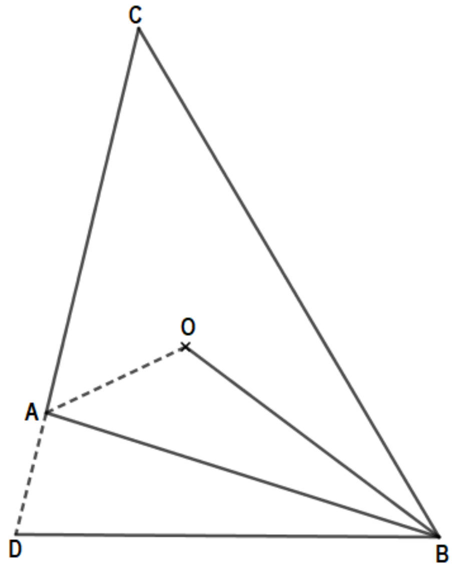
Duke zëvendësuar te barazimi i fundit vlerat e $n = 1, 2, 3\ldots$, kemi:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{a}_1 = 1 \\
&a_2 - a_1 = a_1 + 1 \Leftrightarrow a_2 - a_1 = 2 \\
&a_3 - a_2 = a_1 + 2 \Leftrightarrow a_3 - a_2 = 3 \\
&a_4 - a_3 = a_1 + 3 \Leftrightarrow a_4 - a_3 = 4 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_n - a_{n-1} = a_1 + n \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} = n
\end{aligned}
$$

Mbledhim anë për anë këto barazime:

$$
a_n = \underbrace{1+2+3+\ldots+n}_{\text{shuma e n kufizave të para të bashkësisë } N} \Rightarrow a_n = \frac{n(n+1)}{2}.
$$

4. Jepet trekëndëshi këndngushtë ΔABC ku $AB = AC$. Le të jetë O qendra e rrethit të brendashkruar ΔABC. Skiconi figurën dhe gjeni masën e këndit $m\left(B\hat{A}C\right)$, nëse $BC = AB + AO$. **10 pikë**



Zgjidhja:

Qendra e rrethit të brendashkruar në çdo trekëndësh është pikëprerja e përgjysmoreve të këndeve të tij.

Le të shënojmë $m\left(B\hat{A}C\right)=\alpha,\ m\left(A\hat{B}C\right)=\beta\ dhe\ m\left(A\hat{C}B\right)=\lambda$,

ku $OA,\ OB\ dhe\ OC$ janë përgjysmoret përkatëse.

Meqë $AB = AC$, atëherë $\lambda = \beta$.

Meqenëse O është qendra e rrethit të brendashkruar ΔABC,

atëherë $m\left(A\hat{O}B\right)=90^0+\frac{\lambda}{2}$.

Zgjasim brinjën CA deri në pikën D, në mënyrë të tillë që $AD = AO$

Nga kushti kemi që $CD = CB$. Kështu që

$m\left(C\hat{D}B\right)=m\left(C\hat{B}D\right)=90^0-\frac{\lambda}{2}$, nga ku $m\left(A\hat{O}B\right)+m\left(A\hat{D}B\right)=90^0+\frac{\lambda}{2}+90^0-\frac{\lambda}{2}=180^0$.

Kjo do të thotë se katërkëndëshi $ADBO$ është ciklik.

Kemi: $m\left(A\hat{D}O\right)=m\left(A\hat{B}O\right)=\frac{\beta}{2}$. Meqenëse ΔADO është dybrinjënjëshëm $\left(AD = AO\right)$, atëherë

$m\left(A\hat{D}O\right)=m\left(A\hat{B}O\right)=\frac{\beta}{2}$

$m\left(D\hat{A}O\right)=180^0-2\times m\left(A\hat{D}O\right)=180^0-\beta \Rightarrow m\left(C\hat{A}O\right)=\beta \Rightarrow \alpha = 2\beta$

Por $\lambda=\beta \Rightarrow 4\beta = 180^0 \Rightarrow \beta = 45^0\ dhe\ \alpha = 90^0$. Pra $m\left(B\hat{A}C\right)=90^0$.

5. Vërtetoni mosbarazimin $\sqrt{\dfrac{x^3}{x^3+(y+z)^3}}+\sqrt{\dfrac{y^3}{y^3+(z+x)^3}}+\sqrt{\dfrac{z^3}{z^3+(x+y)^3}}\geq 1$, për çdo $x,\ y,\ z\in R\,/\,x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$. **10 pikë**

Zgjidhja:

Duke zbatuar vetinë e mesatares aritmetike dhe mesatares gjeometrike të numrave $(AM-GM)$, për çdo $t\geq 0$ ka vend:

$$\sqrt{1+t^3}=\sqrt{(1+t)(1-t+t^2)}\leq\frac{(1+t)+(1-t+t^2)}{2}=1+\frac{t^2}{2}\text{, pra }\sqrt{1+t^3}\leq 1+\frac{t^2}{2}$$

Rrjedhimisht:

Për $x>0$ kemi: $\sqrt{\dfrac{x^3}{x^3+(y+z)^3}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{y+z}{x}\right)^3}}\geq\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y+z}{x}\right)^2}\geq\dfrac{1}{1+\dfrac{y^2+z^2}{x^2}}=\dfrac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$

Për $y>0$ kemi: $\sqrt{\dfrac{y^3}{y^3+(z+x)^3}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x+z}{y}\right)^3}}\geq\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+z}{y}\right)^2}\geq\dfrac{1}{1+\dfrac{x^2+z^2}{y^2}}=\dfrac{y^2}{x^2+y^2+z^2}$

Për $z>0$ kemi: $\sqrt{\dfrac{z^3}{z^3+(x+y)^3}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x+y}{z}\right)^3}}\geq\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x+y}{z}\right)^2}\geq\dfrac{1}{1+\dfrac{x^2+y^2}{z^2}}=\dfrac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$

Duke mbledhur anë për anë provojmë vërtetësinë e mosbarazimit të kërkuar:

$$\sqrt{\frac{x^3}{x^3+(y+z)^3}}+\sqrt{\frac{y^3}{y^3+(z+x)^3}}+\sqrt{\frac{z^3}{z^3+(x+y)^3}}\geq\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}=1$$

Siç vihet re, barazimi ndodh për $x=y=z$.