OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS
NË ARSIMIN E MESËM TË ULËT

Faza e dytë

Klasa 9 **05 dhjetor 2024**

1. Alma përgatiti një limonadë me shurup limoni dhe ujë, përkatësisht në raportin $1:2$.
Vëllai i saj e përgatiti këtë limonadë me të njëjtët përbërës, por në raportin përkatës $2:3$.
Nëse përziejmë një sasi nga limonada e Almës me një sasi nga limonada e vëllait të saj, në ç' raport duhet të merren përzierjet e tyre në mënyrë që shurupi dhe uji, në përzierjen e re, të jenë në raportin $17:27$?

10 pikë

Zgjidhja:

Supozojmë se raporti i sasisë së limonadës së marrë nga përzierja e Almës me sasinë e marrë nga përzierja e vëllait të saj për limonadën e re është përkatësisht $a:b$.

Limonada e re do të përmbajë $\frac{1}{3}a+\frac{2}{5}b$ shurup limoni dhe $\frac{2}{3}a+\frac{3}{5}b$ ujë.

Meqenëse limonada e re i ka këto dy përbërës në raportin $17:27$, atëherë ka vend barazimi:

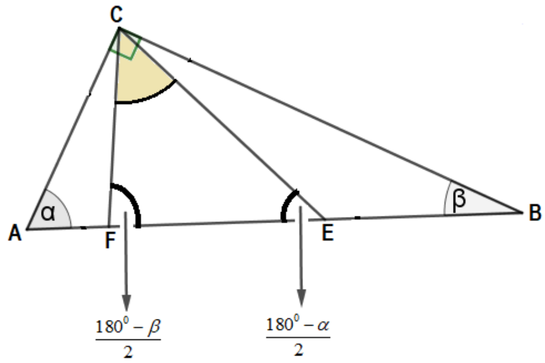
$$\frac{\frac{1}{3}a+\frac{2}{5}b}{17}=\frac{\frac{2}{3}a+\frac{3}{5}b}{27}$$, nga ku:

$$\frac{\frac{1}{3}a+\frac{2}{5}b}{17}=\frac{\frac{2}{3}a+\frac{3}{5}b}{27}\Leftrightarrow\frac{5a+6b}{10a+9b}=\frac{17}{27}\Leftrightarrow 27(5a+6b)=17(10a+9b)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 135a+162b=170a+153b\Leftrightarrow 35a=9b\Leftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{9}{35}$$

Pra sasitë e marra nga limonada e secilit duhet të jenë në raporti $9:35$, në mënyrë që shurupi dhe uji, në përzierjen e re, të jenë në $17:27$.

2. Jepet ΔABC kënddrejtë në C. Në hipotenuzën e këtij trekëndëshi, merren pikat E dhe F të tilla që: $AC = AE \; dhe \; BC = BF$. Gjeni masën e këndit $m\left(E\hat{C}F\right)$. **10 pikë**



Zgjidhja.

Shënojmë $m\left(C\hat{A}B\right) = \alpha \; dhe \; m\left(C\hat{B}A\right) = \beta$.

Meqenëse ΔACE është dybrinjënjëshëm me kulm në A, atëherë $m\left(A\hat{E}C\right) = \frac{180^0 - \alpha}{2}$.

Meqenëse ΔBFC është dybrinjënjëshëm me kulm në B, atëherë $m\left(C\hat{F}B\right) = \frac{180^0 - \beta}{2}$.

Nga ku $m\left(A\hat{E}C\right) + m\left(C\hat{F}B\right) = \frac{180^0 - \alpha}{2} + \frac{180^0 - \beta}{2} = \frac{360^0 - (\alpha+\beta)}{2} = \frac{360^0 - 90^0}{2} = 135^0$.

Kështu që: $m\left(E\hat{C}F\right) = 180^0 - \left[m\left(A\hat{E}C\right) + m\left(C\hat{F}B\right)\right] = 180^0 - 135^0 = 45^0$.

3. Vërtetoni se gjatë pjesëtimit të secilit prej dy numrave të plotë çfarëdo me ndryshesën e tyre, mbetja do të jetë e njëjtë, ndërsa herësit e të dy pjesëtimeve në fjalë do të ndryshojnë ndërmjet tyre me një njësi. **10 pikë**

Zgjidhja

Le të jenë $a, \; b$ dy numra të plotë çfarëdo. Shënojmë $a - b = d$ ndryshesën e tyre dhe me r mbetjen

e pjesëtimit të a me d dhe pjesëtimit të b me d

Kemi: $a - b = d \Leftrightarrow a = d + b$.

Gjatë pjesëtimit të numrit të parë a me ndryshesën d, kemi: $a = kd + r$, ku k është herësi i pjesëtimit dhe r është mbetja.

Kështu që kemi: $d + b = kd + r \Leftrightarrow kd - d = b - r \Leftrightarrow b = (k-1)d + r$

Nga $a = kd + r$ dhe $b = (k-1)d + r$, është e qartë vërtetësia e pohimit të mësipërm si më poshtë:

$$\frac{a}{d} = \frac{kd + r}{d} = k + \frac{r}{d} \; dhe \; \frac{b}{d} = \frac{(k-1)d + r}{d} = (k-1) + \frac{r}{d}$$

4. Gjeni të gjitha çiftet e renditura $(x;y)\in Z^2$ për të cilat ka vend barazimi $\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y^2}=\frac{1}{4}$. **10 pikë**

Zgjidhja:

Për $x\in Z\,/\,x\neq 0\ dhe\ y\in Z\,/\,y\neq 0$ kemi:

$$\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y^2}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{2x}=\frac{1}{4}-\frac{1}{3y^2}\Leftrightarrow\frac{1}{2x}=\frac{3y^2-4}{12y^2}\Leftrightarrow 2x=\frac{12y^2}{3y^2-4}\Leftrightarrow x=\frac{6y^2}{3y^2-4}\Leftrightarrow x=2+\frac{8}{3y^2-4}\qquad(*)$$

Nëse çifti $(x;y)\in Z^2\,/\,x\neq 0\ dhe\ y\neq 0$ është zgjidhje për ekuacionin e dhënë $(*)$, atëherë shprehja $(3y^2-4)$ është pjesëtues i $8-ës$, kështu që

$$3y^2-4=\pm1\ ose\ 3y^2-4=\pm2\ ose\ 3y^2-4=\pm4\ ose\ 3y^2-4=\pm8.$$

Kështu që : $y_1=-1\ ose\ y_2=1\Rightarrow x_1=-6$; $y_3=-2\ ose\ y_4=2\Rightarrow x_3=3$.

Çiftet e kërkuar janë $(-6;-1)$; $(-6;1)$; $(3;-2)$; $(3;2)$.

5. Dihet se rrënjët e ekuacionit $x^2+2023x+1=0$ janë numrat $m\ dhe\ n$.
Rrënjët e ekuacionit $x^2+2024x+1=0$ janë numrat $\mathrm{p}\ dhe\ \mathrm{q}$.
Gjeni vlerën e shprehjes $(m-p)(n-p)(m+q)(n+q)$. **10 pikë**

Zgjidhja:

Zëvendësojmë $2023=A\ dhe\ 2024=B$

Nga formulat e Vietës kemi:

$$\begin{cases}m+n=-A\\ mn=1\end{cases}\ dhe\ \begin{cases}p+q=-B\\ pq=1\end{cases}$$

Nga kushti, në lidhje me ekuacionin e dytë ka vend: $\begin{cases}p^2+Bp+1=0\Rightarrow p^2=-Bp-1\\ q^2+Bq+1=0\Rightarrow q^2=-Bq-1\end{cases}$

Kryejmë zëvendësimet te shprehja $(m-p)(n-p)(m+q)(n+q)$:

$$\underbrace{(m-p)(n-p)}_{\times}\overbrace{(m+q)(n+q)}^{\times}=\left[mn-(m+n)p+p^2\right]\left[mn+(m+n)q+q^2\right]=$$

$$=(1+Ap-Bp-1)(1-Aq-Bq-1)=-pq(A-B)(A+B)=B^2-A^2=2023+2024=4047$$