OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS
NË ARSIMIN E MESËM TË LARTË

Faza e dytë

Klasa 12 **05 dhjetor 2024**

Udhëzime për nxënësin:

1. Provoni se për çdo dy numra realë pozitivë m *dhe* n ka vend mosbarazimi:

$$\left(2m+\frac{1}{2}\right)\left(2n+\frac{1}{2}\right)\le\left(m^2+n+\frac{3}{4}\right)\left(n^2+m+\frac{3}{4}\right)$$ **10 pikë**

Zgjidhja:

Shndërrojmë anën e djathtë të mosbarazimit të dhënë duke u nisur nga vërtetësia e mosbarazimeve:

$\left(m-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0 \Leftrightarrow m^2+\frac{1}{4}\ge m$ dhe $\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0 \Leftrightarrow n^2+\frac{1}{4}\ge n$, kemi:

$$\left(m^2+n+\frac{3}{4}\right)\left(n^2+m+\frac{3}{4}\right)=\left(m^2+\frac{1}{4}+n+\frac{1}{2}\right)\left(n^2+\frac{1}{4}+m+\frac{1}{2}\right)\ge\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^2$$

Por $\left(m+n+\frac{1}{2}\right)^2=m^2+n^2+2mn+m+n+\frac{1}{4}\ge 4mn+m+n+\frac{1}{4}=\left(2m+\frac{1}{2}\right)\left(2n+\frac{1}{2}\right)$

Pra $\left(m^2+n+\frac{3}{4}\right)\left(n^2+m+\frac{3}{4}\right)\ge\left(2m+\frac{1}{2}\right)\left(2n+\frac{1}{2}\right)$, barazimi ndodh për $m=n=\frac{1}{2}$.

2. Një varg gjeometrik me herës q dhe me shumën e n kufizave të para të tij S_n është i tillë që $S_{2n}=a^2-b^2 \; dhe \; S_{3n}=a^2-3b^2$. Gjeni në varësi të parametrave $a \; dhe \; b$ shumën S_n të këtij vargu. Ç' kusht duhet të plotësojnë parametrat $a \; dhe \; b$, që problema të ketë zgjidhje? **10 pikë**

Zgjidhja:

Le të supozojmë që kufiza e parë e vargut të dhënë është c.
Atëherë ka vend:

$$S_{2n}=c+qc+q^2c+...+q^nc+...+q^{2n-1}c \Rightarrow S_{2n}=S_n+q^nc+...+q^{2n-2}c+q^{2n-1}c=S_n+c\times\frac{q^{2n}-q^n}{q-1}$$

Kështu që:

$$S_{2n}=S_n+q^nc\times\frac{q^n-1}{q-1}=S_n+q^nS_n \qquad (1)$$

Gjithashtu ka vend:

$$S_{3n}=S_{2n}+q^{2n}c\times\frac{q^n-1}{q-1}=S_{2n}+q^{2n}S_n \qquad (2)$$

Nga barazimi (1) kemi $q^n=\frac{S_{2n}-S_n}{S_n}$.

Zëvendësojmë barazimin e fundit tek barazimi (2) dhe kemi:

$$S_{3n}=S_{2n}+\left(\frac{S_{2n}-S_n}{S_n}\right)^2\times S_n \text{ ose } (S_n)^2-S_n(S_{2n}+S_{3n})+(S_{2n})^2=0.$$

Duke zëvendësuar $S_{2n}=a^2-b^2 dhe \; S_{3n}=a^2-3b^2$, kemi:

$$(S_n)^2-S_n(a^2-b^2+a^2-3b^2)+(a^2-b^2)^2=0 \Leftrightarrow (S_n)^2-2(a^2-2b^2)S_n+(a^2-b^2)^2=0$$

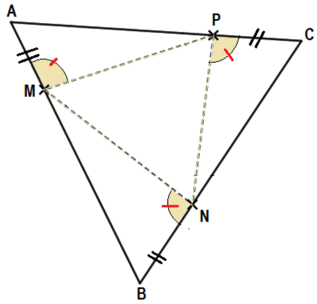
Duke e parë barazimin e fundit si ekuacion kuadratik në lidhje me S_n, kemi:

$$(S_n)_{1,2}=a^2-2b^2\pm b\sqrt{3b^2-2a^2}.$$

Problemi ka zgjidhje vetëm kur: $3b^2-2a^2\geq 0 \Leftrightarrow 2a^2\leq 3b^2 \Leftrightarrow |a|\leq\sqrt{\frac{3}{2}}|b|$.

3. Jepet trekëndëshi ΔABC. Në brinjët $AB,\ BC\ dhe\ AC$ merren përkatësisht pikat $M, N\ dhe\ P$, të tilla që $BN = AM = CP$ dhe $m(B\hat{N}M) = m(A\hat{M}P) = m(C\hat{P}N)$.

Provoni se ΔABC është barabrinjës.



10 pikë

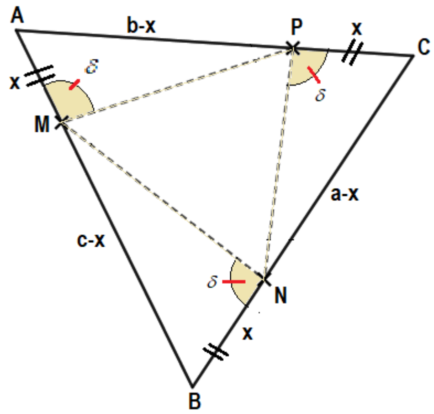
Zgjidhja:

Shënojmë:

$BC = a,\ AC = b,\ AB = c\ dhe\ BN = AM = CP = x \Rightarrow$

$\Rightarrow BM = c - x,\ CN = a - x\ dhe\ AP = b - x$

dhe $m(B\hat{N}M) = m(A\hat{M}P) = m(C\hat{P}N) = \delta$.



Meqenëse $m(A\hat{M}N) = \delta + m(\hat{B})$ si kënd i jashtëm i ΔBNM, atëherë

$m(N\hat{M}P) = m(\hat{B})$.

Me të njëjtin arsyetim kemi që $m(P\hat{N}M) = m(\hat{C})\ dhe\ m(M\hat{P}N) = m(\hat{A})$,

kështu që $\Delta ABC \sim \Delta MNP$. Supozojmë se koeficienti i ngjashmërisë së dy trekëndëshave është k, atëherë kemi:

$MN = ka$

$NP = kb$

$PM = kc,\ ku\ k > 0$

Zbatojmë teoremën e sinusit

në ΔBNM $\dfrac{c-x}{\sin\delta} = \dfrac{ka}{\sin(\hat{B})}, ku\ \sin(\hat{B}) = \dfrac{b}{2R} \Rightarrow \dfrac{c-x}{\sin\delta} = \dfrac{ka}{\frac{b}{2R}} \Rightarrow \dfrac{c-x}{\sin\delta} = \dfrac{2Rka}{b} \Leftrightarrow 2Rk\sin\delta = \dfrac{b(c-x)}{a}$, ku

R është rrezja e rrethit të jashtëshkruar ΔABC.

Në të njëjtën mënyrë përftojmë barazimet:

$2Rk\sin\delta = \dfrac{c(a-x)}{b}\ dhe\ 2Rk\sin\delta = \dfrac{a(b-x)}{c}$,

Pra: $\dfrac{a(b-x)}{c} = \dfrac{b(c-x)}{a} = \dfrac{c(a-x)}{b} \qquad (*)$

Nëse dy prej brinjëve të ΔABC do të ishin të barabarta, atëherë vërtetimi i pohimit do të ishte i thjeshtë: Konkretisht, le të supozojmë se $a = b$, atëherë $a(c-x) = c(a-x) \Rightarrow a = c \Rightarrow a = b = c$, pra ΔABC është barabrinjës.

Tani supozojmë se ΔABC nuk ka dy brinjë të barabarta dhe le të jetë brinja $BC = a$, brinja më e vogël.

Pa cenuar natyrën ciklike të barazimit $(*)$ shqyrtojmë dy rastet e mëposhtme:

Rasti 1: $a < b < c$

Në këtë rast kemi: $a < c \Rightarrow b(c-x) < a(b-x) \Rightarrow \dfrac{b-x}{c-x} > \dfrac{b}{a} > 1 \Rightarrow b > c$ nga $(*)$.

çka bie në kundërshtim me **Rastin 1**

Rasti 2: $a < c < b$

Shkruajmë barazimin $(*)$ në trajtën: $\dfrac{c-x}{\frac{a}{b}} = \dfrac{(a-x)}{\frac{b}{c}} = \dfrac{(b-x)}{\frac{c}{a}}$ $(**)$,

Atëherë nga $a < c \Rightarrow a - x < c - x$, kështu që $\dfrac{b}{c} < \dfrac{a}{b} \Rightarrow b^2 < ac,$ pra $b < a$ dhe $b < c$, gjë që bie përsëri në kundërshtim me rastin .

Si përfundim të dy rastet e shqyrtuara nuk mund të arrihen, ndaj ΔABC i ka të tri brinjët të barabarta, pra është barabrinjës.

4. Gjeni gjithë çiftet e renditur $(x; y) \in N^2$, për të cilët ka vend barazimi $x^2 + y^2 = 2010\sqrt{x-y} - 33^2$.

10 pikë

Zgjidhja:

Supozojmë se barazimi $x^2 + y^2 = 2010\sqrt{x-y} - 33^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 33^2 = 2010\sqrt{x-y}$ është i vërtetë për çdo $(x; y) \in N^2$. Kjo do të thotë se $x^2 + y^2$ plotpjesëtohet me 3, rrjedhimisht 3 është pjesëtues i x *dhe* y.

Kështu mund të shkruajmë: $x = 3m$ *dhe* $y = 3n$, *ku* $m,\ n \in N$.

Duke zëvendësuar tek ekuacioni ynë kemi: $3(m^2 + n^2 + 11^2) = 670\sqrt{3(m-n)}$ $(*)$.

Është e qartë se $m - n = 3k^2,$ *ku* $k \in N$, çka do të thotë se barazimi $(*)$ është i njëvlershëm me:

$m^2 + n^2 + 11^2 = 670k$ $(**)$

Nga ana tjetër ka vend: $m^2 + n^2 > (m-n)^2 = 9k^4$, nga ku duke zëvendësuar te $(**)$, marrim

$9k^4 + 121 < 670k \Leftrightarrow 9k^4 - 670k + 121 < 0$.

Mosbarazimi i fundit është vërtetë për $k \in N / k < 5$.

Shqyrtojmë rastet kur k është çift ose tek:

Rast 1: Nëse $k = 2$ *ose* $k = 4 \Rightarrow m^2 + n^2 + 11^2 \equiv 0(\text{mod}\, 4)$ gjë që është e pamundur përderisa $11^2 \equiv 1(\text{mod}\, 4)$ dhe $m^2 = 0(\text{mod}\, 4)$ *dhe* $n^2 = 0(\text{mod}\, 4)$ *ose* $m^2 = 1(\text{mod}\, 4)$ *dhe* $n^2 = 1(\text{mod}\, 4)$

Rast 2: Nëse $k = 1$, atëherë nga $(*)$ *dhe* $(**)$ përftojmë sistemin:

$$\begin{cases} m^2 + n^2 = 549 \\ m - n = 3 \end{cases} \text{ku } m,\ n \in N \Rightarrow (m = 18;\ n = 15) \Rightarrow x = 54;\ y = 45$$

Rast 3: Nëse $k = 3$ atëherë nga $(*)$ *dhe* $(**)$ përftojmë sistemin:

$$\begin{cases} m^2 + n^2 = 1889 \\ m - n = 27 \end{cases} \text{ku për } m,\ n \in N$$ nuk ka zgjidhje.

Si përfundim, problema ka vetëm një zgjidhje, çiftin $(54; 45)$

5. Dy polinomet $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ dhe $Q(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+...+b_1x+b_0$ i kanë koeficientët numra të plotë, të tillë që a_n-b_n është numër i thjeshtë, $a_{n-1}=b_{n-1}$ dhe $a_nb_0-a_0b_n\neq 0$.
Duke supozuar se ekziston numri racional r për të cilin $P(r)=Q(r)=0$, tregoni se r është i plotë. **10 pikë**

Zgjidhja:

Marrim numrin racional r, të tillë që $r=\dfrac{p}{q}$ e pathjeshtueshme, pra $PMP(p,q)=1$.

Duke zbatuar kushtin $P(r)=0\ dhe\ Q(r)=0$ dhe shumëzuar të dy anët me q^n, kemi:

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+...+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0$$
$$dhe$$
$$b_np^n+b_{n-1}p^{n-1}q+...+b_1pq^{n-1}+b_0q^n=0$$

Zbresim anë për anë barazimet dhe duke pasur parasysh kushtin $a_{n-1}=b_{n-1}$, kemi:

$$(a_n-b_n)p^n+(a_{n-2}-b_{n-2})p^{n-2}q^2+...+(a_1-b_1)pq^{n-1}+(a_0-b_0)q^n=0 \qquad (*)$$

Nga vërtetësia e barazimit $(*)$, kuptohet se q është pjesëtues i $(a_n-b_n)p^n$ nga ku del se q është pjesëtues i a_n-b_n. Meqenëse nga kushti kemi që a_n-b_n është numër i thjeshtë, atëherë
$q=1\ ose\ q=a_n-b_n$.

Shqyrtojmë rastin kur $q=a_n-b_n$, atëherë zëvendësojmë te barazimi $(*)$, pjesëtojmë me $q>1$(meqë $q=a_n-b_n$) të dy anët e tij dhe kemi:

$$p^n+(a_{n-2}-b_{n-2})p^{n-2}q+...+(a_1-b_1)pq^{n-2}+(a_0-b_0)q^{n-1}=0$$

Për $n>1\ \Rightarrow p\,\vdots\, q$, çka hedh poshtë supozimin se $PMP(p,q)=1$

N.q.se: $n=1$, atëherë kemi:

$a_1p+a_0q=0\ dhe\ b_1p+b_0q=0\Leftrightarrow a_1b_0-a_0b_1=0$, çka hedh poshtë kushtin e dhënë se $a_nb_0-a_0b_n\neq 0$.

Nga ana tjetër kemi: $\underbrace{a_{n-1}=b_{n-1}\Rightarrow a_0=b_0}_{n=1}$

Duke zbritur anë për anë kemi: $(a_1-b_1)p=0\Leftrightarrow p=0\Leftrightarrow r=0$. Pra r është i plotë.