OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS
NË ARSIMIN E MESËM TË LARTË

Faza e dytë

Klasa 10 **05 dhjetor 2024**

1. Një qytetar ka depozituar një sasi lekësh pa afat me interes vjetor 20%. Ky qytetar vendos që në fund të çdo viti të tërheqë 2 000 lekë për çdo 10 000 lekë të depozitës. Afërsisht pas sa vitesh ai nuk do të ketë më lekë në këtë depozitë?
Udhëzim: Shuma e n kufizave të para të një vargu gjeometrik me kufizë të parë a_1 dhe herës $q>1$, gjendet me formulën $S_n=\frac{a_1\left(q^n-1\right)}{q-1}$. **10 pikë**

Zgjidhja:

Meqenëse banka i paguan qytetarit 20% të shumës së depozituar çdo vit, atëherë pas çdo viti, çdo lek bëhet 1,2 lekë. Çdo 10 000 lekë e depozitës në fund të një viti bëhet $(1+0,2)\times 10\ 000=1,2\times 10\ 000=12\ 000$ lekë.

Supozojmë se depozita do të boshatisej pas $t-$vitesh. Kjo do të thotë se pas $t-$vitesh çdo 10 000 lekë do të bëhej $1,2^t\times 10\ 000$ lekë.

Nga ana tjetër për $t-$vjet, ky qytetar do të tërhiqte nga banka gjithsej:

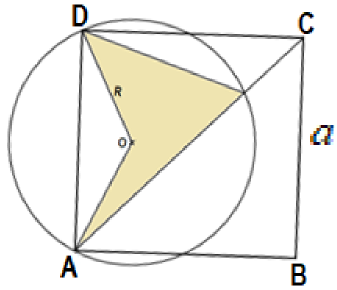
$$2\ 000\times 1,2+2\ 000\times 1,2^2+2\ 000\times 1,2^3+\ldots+2\ 000\times 1,2^t=\frac{2\ 000\times 1,2\times\left(1,2^t-1\right)}{0,2}=2\ 000\times 6\times\left(1,2^t-1\right)$$

Meqenëse pas $t-$vitesh depozita do të boshatisej, atëherë kemi:

$$1,2^t\times 10\ 000=2\ 000\times 6\times\left(1,2^t-1\right)\Leftrightarrow 1,2^t=6\Leftrightarrow t=\log_{1,2}6\Leftrightarrow t=\frac{\log 6}{\log 1,2}=\frac{0,7781}{0,0791}=9,84$$

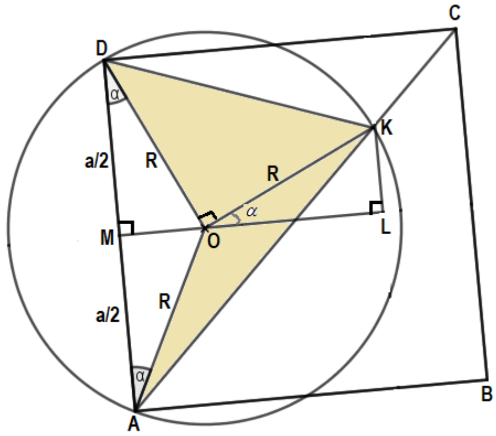
Pra afërsisht pas 10 vjetësh kjo depozitë do të boshatisej.
(Nxënësi mund të gjejë përfundimin e përafruar edhe përmes provës).

2. Në figurën e mëposhtme paraqitet rrethi me qendër O dhe rreze R.
Katërkëndëshi $ABCD$ është një katror me brinjë a njësi.
Ç' pjesë të syprinës së katrorit zë zona e hijezuar? **10 pikë**



Zgjidhja:

Bëjmë plotësimet përkatëse si më poshtë:
Ndërtojmë rrezen OK (K pikëprerja e diagonales AC me rrethin e dhënë).
Nga pikat O dhe K heqim paralelet përkatësisht me brinjët DC dhe AD të katrorit të dhënë.
Le të shënojmë me L pikëprerjen e paraleleve të hequra.
Kuptohet se $ML \perp KL$.
Meqenëse $ABCD$ është katror dhe AC është diagonalja e tij, atëherë $m\left(D\hat{A}C\right)=45^0$, nga ku $m\left(D\hat{O}K\right)=90^0$ si kënd qendror përkatës i këndit rrethor $D\hat{A}K \equiv D\hat{A}C$.



Në ΔDMO, meqenëse $m\left(D\hat{O}M\right)=90^0-\alpha \Rightarrow m\left(K\hat{O}L\right)=\alpha$
Kemi: $\Delta DMO \cong \Delta AMO \cong \Delta OLK$ si trekëndësha kënddrejtë me një kënd të ngushtë dhe hipotenuzë të barabartë.
Prej kësaj kongruence, rrjedh se $OL=\frac{a}{2}$.

Atëherë $S_{hijezuar}=\frac{AD\times OL}{2}=\frac{a\times\frac{a}{2}}{2}=\frac{a^2}{4}=\frac{S_{katrorit}}{4}$

Pra syprina e zonës së hijezuar zë $\frac{1}{4}$ ose 25% të syprinës së katrorit.

3. Zbërtheni në faktorë natyrorë numrin $2^{398}+1$. **10 pikë**

Zgjidhja:

$$2^{398}+1=\left(2^{398}+2^{200}+1\right)-2^{200}=$$
$$=\left(2^{398}+2\times2^{199}+1\right)-\left(2^{100}\right)^2=$$
$$=\left[\left(2^{199}\right)^2+2\times2^{199}+1\right]-\left(2^{100}\right)^2=$$
$$=\left(2^{199}+1\right)^2-\left(2^{100}\right)^2=$$
$$=\left(2^{199}+1+2^{100}\right)\left(2^{199}+1-2^{100}\right)$$

4. Sistemi $\begin{cases} x+y+z=1 \\ k^x+k^y+k^z=36-k \end{cases}$

ka një zgjidhje të vetme reale, për $k>0$. Provoni se $k\le 27$. **10 pikë**

Zgjidhja:

Supozojmë të kundërtën, pra $k>27$, atëherë: $k>27 \Leftrightarrow -k<-27 \Leftrightarrow 36-k<9 \Leftrightarrow 9>36-k$.
Zbatojmë mosbarazimin e mesatares aritmetike dhe gjeometrike të numrave $(AM-GM)$:

$9>36-k=k^x+k^y+k^z \ge 3k^{\frac{x+y+z}{3}}>3\times 27^{\frac{x+y+z}{3}}=3\times 27^{\frac{1}{3}}=9 \Leftrightarrow 9>9$?!, çka hedh poshtë supozimin.

Rrjedhimisht $k\le 27$.
Për $k=27$, zgjidhja e sistemit është : $x=y=z=\frac{1}{3}$.

5. Gjeni gjithë numrat e plotë n për të cilët numrat $16n+9$ *dhe* $9n+16$ janë katrorë të plotë. **10 pikë**

Zgjidhja:

Supozojmë se numrat e dhënë $16n+9$ *dhe* $9n+16$ janë katrorë të plotë, atëherë mund të shkruajmë: $16n+9=x^2$ *dhe* $9n+16=y^2$ nga ku duke eleminuar n kemi:
$16y^2-9x^2=16^2-9^2 \Leftrightarrow (4y-3x)(4y+3x)=7\times 25$
Duke pasur parasysh se $4y-3x>0$, shqyrtojmë rastet e mundshme:
$\begin{cases} 4y-3x=1 \\ 4y+3x=175 \end{cases}$; $\begin{cases} 4y-3x=7 \\ 4y+3x=25 \end{cases}$; $\begin{cases} 4y-3x=5 \\ 4y+3x=35 \end{cases}$
Nga ku përftojmë zgjidhjet përkatëse $(29;22)$, $(3;4)$, $(5;5)$.
Prej këtyre zgjidhjeve përftojmë vlerat e mundshme të n, të cilat janë përkatësisht:
$n=52$ *ose* $n=0$ *ose* $n=1$.