REPUBLIKA E SHQIPËRISË

MINISTRIA E ARSIMIT SPORTIT DHE RINISË

QENDRA E SHËRBIMEVE ARSIMORE

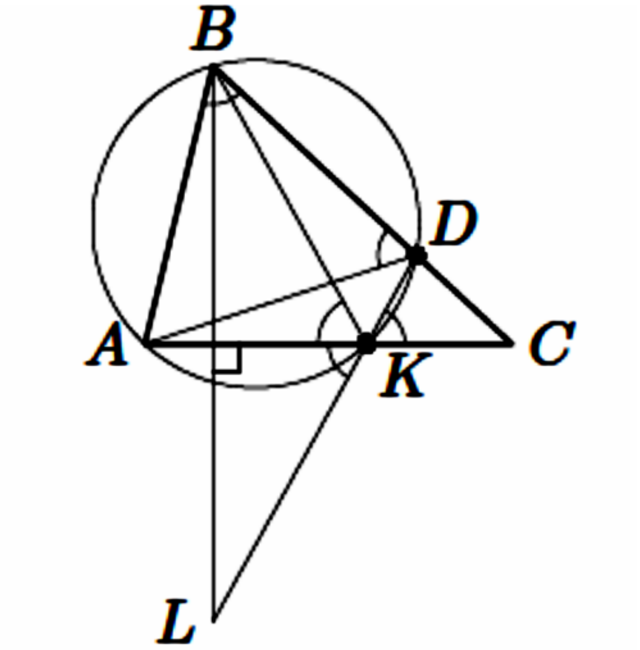
OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS - KLASA E 9-TË

Viti mësimor 2020-2021 Faza e tretë

1.

Zgjidhje

Meqenëse trekëndëshi $\Delta\boldsymbol{ABD}$ është dybrinjëshëm, kemi që $\widehat{\boldsymbol{ADB}} = \widehat{\boldsymbol{ABD}}$. Meqenëse $\boldsymbol{ABDK}$ është katërkëndësh ciklik, $\widehat{\boldsymbol{AKB}} = \widehat{\boldsymbol{AD}}$B dhe $\widehat{\boldsymbol{ABD}} = \mathbf{180°} - \widehat{\boldsymbol{AKD}} = \widehat{\boldsymbol{LKA}}$. Prandaj, në $\Delta\boldsymbol{BKL}$, lartësia $\boldsymbol{KA}$ është përgjysmore, dhe mesore për $\Delta\boldsymbol{BKL}$; atëherë pikat $\boldsymbol{L}$ dhe $\boldsymbol{B}$ janë simetrike në lidhje me $\boldsymbol{AC}$, prandaj segmentet $\boldsymbol{CL}$ dhe $\boldsymbol{CB}$ janë gjithashtu simetrike. Prandaj, gjatësitë e tyre janë të barabarta.



2.

Zgjidhje

Nga AM-GM kemi që: $\sqrt{bc} \le \frac{b+c}{2}$, $\sqrt{ca} \le \frac{c+a}{2}$, $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$

Duke i zëvendësuar tek mosbarazimi $a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab} \ge 1$

marrim që:

$$a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab} \le a \cdot \frac{(b+c)}{2} + b \cdot \frac{(c+a)}{2} + c \cdot \frac{(a+b)}{2} = ab + bc + ca$$

Pra: $ab + bc + ca \ge 1$

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca \;\Rightarrow\; a^2 + b^2 + c^2 \ge 1$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \ge 1 + 2 \cdot 1 = 3$$

Nga ku marrim që: $a + b + c \ge \sqrt{3}$

3.

Zgjidhje

$$\sqrt{26 - 4\sqrt{30}} = \sqrt{\left(2\sqrt{5} - \sqrt{6}\right)^2} = \left(2\sqrt{5} - \sqrt{6}\right)$$

$$\sqrt{10 + 4\sqrt{6}} = \sqrt{\left(2 + \sqrt{6}\right)^2} = \left(2 + \sqrt{6}\right)$$

$$\sqrt{84 + 32\sqrt{5}} = \sqrt{\left(8 + 2\sqrt{5}\right)^2} = \left(8 + 2\sqrt{5}\right)$$

$$\sqrt{26 - 4\sqrt{30}} + \sqrt{10 + 4\sqrt{6}} - \sqrt{84 + 32\sqrt{5}} =$$

$$= \left(2\sqrt{5} - \sqrt{6}\right) + \left(2 + \sqrt{6}\right) - \left(8 + 2\sqrt{5}\right) = -6$$

$$A = \left\{x \in Z \,/\, \frac{-6}{3x + 3} \in Z\right\} = \left\{x \in Z \,/\, \frac{-2}{x + 1} \in Z\right\}$$

Pra, elementë të bashkësisë **A** janë të gjithë numrat $x \in Z$ të tillë që:

$x + 1$ plotpjeston **-2** dhe $x + 1 \neq 0$

$$\left.\begin{array}{ll} x+1=1 & \Rightarrow x=0 \\ x+1=2 & \Rightarrow x=1 \\ x+1=-2 & \Rightarrow x=-3 \\ x+1=-1 & \Rightarrow x=-2 \end{array}\right\rangle \Rightarrow A=\{-3,-2,0,1\}$$

Pra, bashkësia **A** ka **4** elementë.

4.

Zgjidhje.

Që $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}$ të jetë racional duhet që të shprehet në formën:

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}} = \frac{p}{q} \quad \text{ku} \ \ p, q \in \mathbb{Z}, \ \ q \neq 0$$

Nga kjo marrim:

$$q\sqrt{2} + q\sqrt{a} = p\sqrt{3} + p\sqrt{b} \Leftrightarrow q\sqrt{2} - p\sqrt{3} = p\sqrt{b} - q\sqrt{a}$$

Ngrejmë në katror të dy anët dhe kemi:

$$2q^2 + 3p^2 - 2pq\sqrt{6} = bp^2 + aq^2 - 2pq\sqrt{ab}$$

$$\sqrt{ab} = \frac{bp^2 + aq^2 - 2q^2 - 3p^2}{2pq} + \sqrt{6} \quad (*)$$

Shënojmë me m **:**

$$m = \frac{bp^2 + aq^2 - 2q^2 - 3p^2}{2pq}, \ m \in \mathbb{Q} \quad \text{dhe e zëvendësojmë tek } (*)$$

$$\sqrt{ab} = m + \sqrt{6} \quad \text{nga ku marrim që :} \quad ab = m^2 + 2m\sqrt{6} + 6$$

Për $m \neq 0$ kemi **që:** $\sqrt{6} = \dfrac{ab - m^2 - 6}{2m} \in \mathbb{Q}$, absurditet. Pra, $m = 0$ **.**

Për $\boldsymbol{m = 0}$ kemi $\mathbf{a \cdot b = 6}$ ku $\boldsymbol{a, b} \in \mathbb{N}$**.**

Shqyrtojmë rastet:

1) $\mathbf{a = 1}$ **,** $\mathbf{b = 6}$ marrim $\quad \mathbf{m = \dfrac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{3} + \sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \notin Q}$

2) $\mathbf{a = 2}$ **,** $\mathbf{b = 3}$ marrim $\quad \mathbf{m = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} \notin Q}$

3) $\mathbf{a = 3}$ **,** $\mathbf{b = 2}$ marrim $\quad \mathbf{m = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = 1 \in Q}$

4) $\mathbf{a = 6}$ **,** $\mathbf{b = 1}$ marrim $\quad \mathbf{m = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{3} + 1} = \sqrt{2} \notin Q}$

Pra, vetëm për $\boldsymbol{a = 3}$ dhe $\boldsymbol{b = 2}$ kemi që $\mathbf{\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{a}}{\sqrt{3} + \sqrt{b}}}$ është numër racional.

5.

Zgjidhje

Ka $\mathbf{2^{64}}$ faqe të mundshme të ngjyrosura të rrjetës së katrorëve me 8 rreshta dhe 8 shtylla. Nqs $\boldsymbol{c}$ është një katror $\boldsymbol{3x3}$, numri i ngjyrosjeve të tilla ku **c** është katror njëngjyrësh është i barabartë me $2 \times 2^{55} = 2^{56}$. Tani ka 36 katrorë 3 × 3, kështu që ka më së shumti $36 \times 2^{56} = 9 \times 2^{58}$ ngjyrosje homogjene. Ngjyrosje johomogjene jane $\mathbf{2^{64}} - 9 \times 2^{58} = 2^{58}(2^6 - 9) = 2^{58} \times 55$. Pra, ngjyrosje johomogjene ka me shumë.

6.

Ne e tregojmë atë me induksion në $\mathbf{k}$.

Në qoftë se $\mathbf{k = 1}$ është e qartë.

Supozoni se vetia është e vërtetë për të gjithë numrat e plotë $\mathbf{p = k\text{-}1}$

E provojmë për $\mathbf{p} = \mathbf{k}$.

Në qoftë se një nga ngjyrat $\mathbf{c}$ merret saktësisht $\mathbf{n}$ herë, ne vendosim të gjithë objektet ngjyra e të cilave është $\mathbf{c}$ në kutinë e fundit. Hipoteza e induksionit lejon që objektet e mbetura $\mathbf{n\ (k\ \text{-}1)}$ të ruhen në kutitë e para $\mathbf{k\ \text{-}1}$ në mënyrë që secila kuti të përmbajë objekte me më së shumti $\mathbf{2}$ ngjyra të ndryshme.

Pra, supozoni se asnjë ngjyrë nuk merret saktësisht $\mathbf{n}$ herë. Nëse të gjitha ngjyrat merren $\leq \boldsymbol{n} - \mathbf{1}$ herë, atëherë ka gjithsej më së shumti $\mathbf{(n\ \text{-}1)k}$ objekte, gjë që bie ndesh me hipotezën.

Pra, një nga ngjyrat $\boldsymbol{c_1}$ merret $\geq \boldsymbol{n} + \mathbf{1}$ herë. Po kështu, një nga ngjyrat $\boldsymbol{c_2}$ merret $\leq \mathbf{n - 1}$ herë.

Më pas vendosim të gjitha objektet me ngjyrë $\boldsymbol{c}_{\mathbf{2}}$ në kutinë e fundit. Ne e plotësojmë këtë kuti me objekte me ngjyrë $\boldsymbol{c_1}$. Hipoteza e induksionit na lejon të renditim $\mathbf{n\ (k\ \text{-}\ 1)}$ të ruhen në $\boldsymbol{k} - \mathbf{1}$ kutitë e para në mënyrë që secila kuti të përmbajë objekte me më së shumti $\mathbf{2}$ ngjyra të ndryshme.