REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
DHE SPORTIT

QENDRA E SHËRBIMEVE ARSIMORE

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS PËR ARSIMIN E MESËM TË ULËT

Viti shkollor 2021-2022 Faza e tretë

ZGJIDHJET

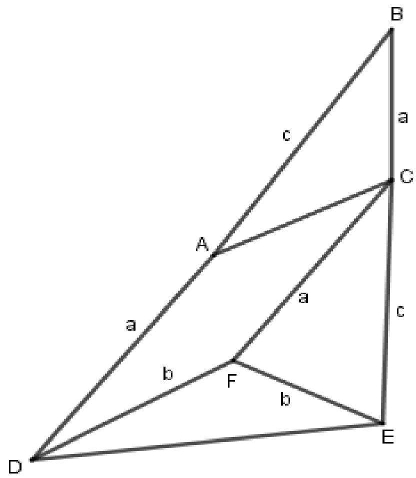
Zgjidhja e ushtrimit 1

Që barazimi të jetë i vërtetë, mjafton të tregojmë se masa e këndit $m(\widehat{B}) < 60°$

Zgjasim brinjët BA dhe BC përtej pikave A dhe B në mënyrë të tillë që AD=BC =a dhe CE=AB=c.

Më pas ndërtojmë paralelogramin ACFD, pra kemi AD||CF dhe DF||AC. Shohim që $\Delta BAC \cong \Delta CFE$ (Rasti i 3-të i kongruencës.)

Nga kjo marrim: AC=FE=FD=b.



Duke u bazuar në kuptimin e ekzistencës së trekëndëshit, është e vërtetë se:

DE<DF+FE=2b. Nga kushti i dhënë: 2b < a+c rrjedh se DE < BE = (a+c)= BD

Kështu kemi që $(\widehat{B}) < (\widehat{E})$, atëherë $3(\widehat{B}) < 180°$ ose $m(\widehat{B}) < 60°$.

Zgjidhja e ushtrimit 2

Shënojmë me x, y, numrat natyrorë të kërkuar, të tillë që numri 30x0y03 të plotpjesëtohet me 13.

Atëherë, numri ynë mund të shkruhet: $N = 3 \cdot 10^6 + x \cdot 10^4 + y \cdot 10^2 + 3$

Meqë N shumëfish i 13 dhe x, y janë natyrorë, atëherë x dhe y duhet të përmbushin mosbarazimet:

$$0 \le x \le 9, 0 \le y \le 9$$

Gjithashtu numrat: $10^6, 10^4, 10^2$ gjatë pjesëtimit me 13, kanë përkatësisht mbetjet 1, 3, 9

Kështu mund të shkruajmë:

$$3 \cdot 10^6 = 13k_1 + 3$$
$$x \cdot 10^4 = 13k_2 + 3x$$
$$y \cdot 10^2 = 13k_3 + 9y$$

ku k_1, k_2, k_3 , janë numra natyrorë, kështu që:

N=13k+3+3x+9y+3,
Nga ku
N=13k+3(x+3y+2), ku k është natyror.

Që numri N të plotpjesëtohet me 13, duhet dhe mjafton që edhe x+3y+2 të plotpjesëtohet me 13 dhe x, y të vërtetojnë ekuacionin më sipër.
Ndaj ka vend barazimi:
x+3y+2=13m,
ku m është gjithashtu natyror.
Me kushtin që $0 \le x \le 9, 0 \le y \le 9$, kanë vend mosbarazimet:

x+3y+2≤9+3 nga ku x+3y+2≤38

Kjo do të thotë që m, vërteton inekuacionin $13m \le 38$, pra m mund të jetë:

m=1 ose m=2

Rasti 1: m=1, kemi x+3y+2=13 nga ku x=11-3y
Duke pasur parasysh që: $0 \le x \le 9, 0 \le y \le 9$, është e qartë se:

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 8 \end{cases} \text{ ose } \begin{cases} y = 2 \\ x = 5 \end{cases} \text{ ose } \begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Rasti 2: m=2 , kemi: x+3y+2=26 nga ku x= 3(8−y)
Nga ku:

$$\begin{cases} y = 5 \\ x = 9 \end{cases} \text{ ose } \begin{cases} y = 6 \\ x = 6 \end{cases} \text{ ose } \begin{cases} y = 7 \\ x = 3 \end{cases} \text{ ose } \begin{cases} y = 8 \\ x = 0 \end{cases}$$

Pra, problemi ynë ka 7 zgjidhje të mundshme dhe numrat janë:

3080103, 3050203, 3020303, 3090503, 3060603, 3030703, 3000803

Zgjidhja e ushtrimit 3

Le të jetë x_n numri i mënyrave të ndryshme me të cilat topi rikthehet pas n pasimesh tek basketbollisti A.

Le të jetë y_n numri i mënyrave me të cilat topi kthehet nga një basketbollist fiks i ndryshëm tek A pas n pasimesh.

Kështu që kemi:

$x_n = 3y_{n-1}$ dhe $y_n = x_{n-1} + 2y_{n-1}$

Nga ku kemi $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $y_1 = 1$ dhe $y_2 = 2$.

Nëse zëvendësojmë dhe eliminojmë y_n, marrim:

$x_{n+1} = 3x_{n-1} + 2x_n$

kështu $x_3 = 6$

$x_4 = 21$

$x_5 = 60$

$x_6 = 183$

$x_7 = 546$

$x_8 = 1641$

$x_9 = 6828$

$x_{10} = 18579$ mënyra të ndryshme.

Zgjidhja e ushtrimit 4

Zëvendësojmë: $a=\sqrt[3]{14+\sqrt{x}}$ dhe $b=\sqrt[3]{14-\sqrt{x}}$, pra a+b=4, ngremë në kub të dy anët e barazimit të fundit dhe kemi:

$(a+b)^3 = 64$ nga ku: $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = 64$ ose më thjeshtë:

$a^3+b^3+3ab(a+b) = 64$.

Rizëvendësojmë në ekuacionin e dhënë dhe kemi:

$$14+\sqrt{x}+14-\sqrt{x}+12\sqrt[3]{(14-\sqrt{x})(14+\sqrt{x})}=64$$

$$28+12\sqrt[3]{196-x}=64$$

$$12\sqrt[3]{196-x}=36$$

Nga ku x = 169.

Pra, zgjidhje e ekuacionit tonë është x=169

Zgjidhja e ushtrimit 5

Nga kushti kemi a+b+c=1 dhe: $a < b+c$ nga ku $2a < 1$, pra $1-2a > 0$ dhe $1-2a < 1$.

Kemi kështu:

$0 < 1-2a < 1$.

Në të njëjtën mënyrë shkruajmë:

$0 < 1-2b < 1$,

$0 < 1-2c < 1$ nga ku ka vend:

$$\frac{1+a}{1-2a}+\frac{1+b}{1-2b}+\frac{1+c}{1-2c}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-2a}+\frac{1}{1-2b}+\frac{1}{1-2c}\right)-\frac{3}{2}\geq\frac{3}{2}\,\frac{9}{(1-2a)(1-2b)(1-2c)}-\frac{3}{2}=\frac{27}{2}-\frac{3}{2}=12$$