REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
DHE SPORTIT

QENDRA E SHËRBIMEVE ARSIMORE

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS PËR ARSIMIN E MESËM TË LARTË

Viti shkollor 2021-2022 **Faza e tretë**

ZGJIDHJET

Zgjidhja e ushtrimit 1

Le të marrim funksionin y = f(x), të tillë:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad \textbf{(1)}$$

Nëse shumëzojmë të dy anët e barazimit (1) me (– 2x), marrim:

$$-2xf(x) = -2a_0 x - 2a_1 x^2 - 2a_2 x^3 - \cdots - 2a_{n-1} x^n - \cdots \quad \textbf{(2)}$$

Nëse shumëzojmë të dy anët e barazimit (1) me (– $3x^2$) marrim:

$$-3x^2 f(x) = -3a_0 x^2 - 3a_1 x^4 - 3a_2 x^4 - \cdots - 3a_{n-2} x^n - \cdots \quad \textbf{(3)}$$

Në tre barazimet e mësipërme, zëvendësojmë çfarë kemi nga kushti:

$a_0 = -1$, $a_1 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 3^n(\text{ për } n \geq 2)$, dhe i mbledhim anë për anë, duke marrë:

$$(1-2x-3x^2)f(x) = -1 + 3x + 3^2 x^2 + \ldots + 3^n x^n + \ldots = -1 + \frac{3x}{1-3x} = \frac{6x-1}{1-3x}$$

(shuma duke filluar nga mbledhori i dytë është shuma e një progresioni gjeometrik me kufizë të parë 3x dhe herës 3x), nga ku nxjerrim f(x):

$f(x) = \dfrac{6x-1}{(1-3x)^2(1+x)}$ të cilin mund ta shkruajmë si shumë thyesash elementare:

$$f(x) = \frac{6x-1}{(1-3x)^2(1+x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{(1-3x)^2} + \frac{C}{1-3x}$$

Gjejmë A, B dhe C dhe kemi:

$$f(x) = \frac{6x-1}{(1+x)(1-3x)^2} = -\frac{7}{16(1+x)} + \frac{3}{4(1-3x)^2} - \frac{21}{16(1-3x)}$$

$$f(x) = -\frac{7}{16}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n + \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}^1 - \frac{21}{16}\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n-3)3^{n+1} - 7(-1)^n}{16}x^n$$

Nga ku nxjerrim: $a_n = \dfrac{(4n-3)3^{n+1} - 7(-1)^n}{16}$

Zgjidhja e ushtrimit 2

Ne duhet të përcaktojmë numrin e përkëmbimeve të mundshme të adresave për të cilat asnjë prej letrave nuk i është caktuar adresa e saktë. Numri i të gjitha përkëmbimeve të mundshme të n-elementëve është n!. Tani përcaktojmë numrin e permutacioneve për të cilat një grup i caktuar
$I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ i letrave (për hir të thjeshtësisë, ne numërojmë shkronjat nga 1 në n) është shkruar adresa e saktë mbi to.
Nëse $m = |I|$ adresa janë të sakta, atëherë mbeten letrat $n - m$ tek të cilat adresat mund të jenë caktuar në $(n - m)!$ mënyra. Prandaj numri i përkëmbimeve për të cilat një grup merr adresat e sakta janë saktësisht
$(n - |I|)!$. Duke ditur se në bashkësinë I, kemi n elementë, mund të shkruajmë:

$$n! - \sum_{k=1}^{n} \sum_{|I|=k} (-1)^{k-1}(n-k)\,!$$

Meqenëse ka $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ nënbashkësi me k elementë, shprehja mund të shkruhet:

$$n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Prandaj, probabiliteti që në asnjë nga zarfet, adresat të mos jetë e saktë është saktësisht:

$$P=\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \cdots \pm \frac{1}{n!}$$

Për n të madh, kjo i afrohet shumës së pafundme:
$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e} = 0.367$ ku e-konstantja e Neperit.

Zgjidhja e ushtrimit 3

Marrim në shqyrtim funksionin f(x) = xlnx, i cili është një funksion i mysët (konveks) në R^{*+} sepse:

f ”(x) = $\frac{1}{x} > 0, \forall x \in R^{*+}$.

Meqenëse f(x) është i mysët në R^{*+} dhe nga mosbarazimi Jensen marrim se:

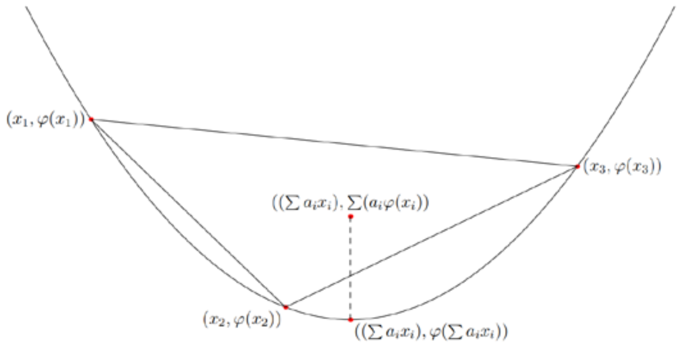
$f(a) + f(b) + f(c) \geq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$.

Duke zëvendësuar në këtë mosbarazim funksionin e zgjedhur kemi:

$lna^a + lnb^b + lnc^c \geq 3ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{\frac{a+b+c}{3}}$ ose në mënyrë ekuivalente (nga vetitë e logaritmeve):

$\ln(a^a b^b c^c) \geq ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}$, nëse marrim exponentët e të dy anëve kemi:

$a^a b^b c^c \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}$, i cili përbën dhe mosbarazimin e kërkuar.



Vërtetësia e mosbarazimit të Jensenit.

Zgjidhja e ushtrimit 4

Le të shënojmë sinx+cosx=a **(*)**

Ku a $\in$**[-$\sqrt{2}$;$\sqrt{2}$]**

1. Ngremë në katror të dy anët e barazimit dhe kemi:

$(\sin x+\cos x)^2=a^2$ nga ku: $\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=a^2$. Meqë $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ atëherë

$\sin x\cos x=\frac{a^2-1}{2}$ **(**)**

2. Ngremë të dy anët e barazimit (*) në kub dhe kemi:

$(\sin x+\cos x)^3=a^3$ nga ku:

$\sin^3 x+3\sin^2 x\cos x+3\sin x\cos^2 x+\cos^3 x=a^3 \xLeftrightarrow[\text{faktorizojmë tek dy mbledhorët e qëndrës}]{}$

$\sin^3 x+\cos^3 x+3\sin x\cos x(\sin x+\cos x)=a^3$. Zëvendësojmë këtu përfundimet (*) dhe (**) dhe kemi:

$\sin^3 x+\cos^3 x = a^3-\frac{3a^3-3a}{2}$ nga ku:

$\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{3a-a^3}{2}$ **(***)**

3. Ngremë të dy anët e barazimit (*) në fuqi të pestë dhe kemi:

$(\sin x+\cos x)^5=a^5$. Koeficientët binomialë në këtë zbërthim janë 1, 5, 10, 10, 5, 1, ndaj kemi:

$(\sin x+\cos x)^5 =$

$\sin^5 x+5\sin^4 x\cos x+10\sin^3 x\cos^2 x+10\sin^2 x\cos^3 x+5\sin x\cos^4 x+\cos^5 x=a^5$

Vini re faktorizimet e nevojshme (pjesët nën hije):

$\sin^5 x+5\sin x\cos x(\sin^3 x+\cos^3 x)+10\sin^2 x\cos^2 x(\sin x+\cos x)+\cos^5 x=a^5$.

Zëvendësojmë këtu barazimet e përftuara më sipër (*), (**) dhe (***) dhe kemi:

$\sin^5 x+\cos^5 x=a^5-5\frac{a^2-1}{2}\times\frac{3a-a^3}{2}-10\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2\times a$, por nga kushti kemi që $\sin^5 x+\cos^5 x=1$, pra:

$\frac{5(a^2-1)(3a-a^3)}{4}+\frac{10a(a^2-1)^2}{4}=a^5-1$. Kryejmë shndërrimet e nevojshme dhe kemi:

$5(4a^3-a^5-3a)+10a(a^4-2a^2+1)=4a^5-4$ nga ku përmes thjeshtimeve kemi:

$a^5-5a+4=0$. Vini re se: a=1 është rrënjë (e dyfishtë) ndaj faktorizojmë plotësisht polinomin.

$(a-1)^2(a^3+2a^2+3a+4)=0$

Faktori kubik, ka rrënjë jashtë segmentit **[-$\sqrt{2}$;$\sqrt{2}$],** ndaj a=1

Pra sinx+cosx=1

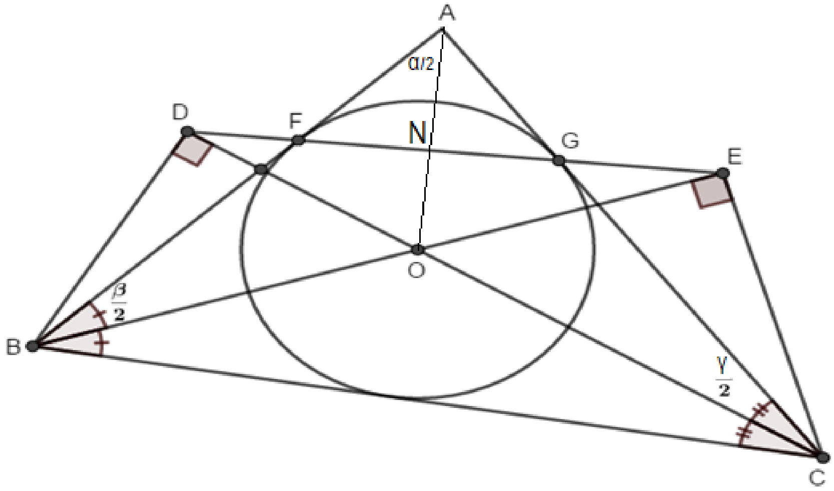
1+sin2x =1

sin2x=0

$x=k\frac{\pi}{2}$, $k\in Z$, $x\in[0;2\pi]$.

Zgjidhjet e ekuacionit tonë janë $\mathbf{x_1=0}$, $\mathbf{x_2=\frac{\pi}{2}}$, $\mathbf{x_3=3\frac{\pi}{2}}$, $\mathbf{x_4=2\pi}$

Zgjidhja e ushtrimit 5



Shënojmë me: α, β, γ , përkatësisht masat e këndeve A, B dhe C. Ndërtojmë OA e cila shërben si përgjysmore e këndit $\widehat{BAC}$, kështu FO=GO dhe AF=AG, për rrjedhojë AO është pingule me FG në pikën N.

Në trekëndëshin kënddrejtë ΔAFN, masa e këndit $\widehat{NFA}$ = 90− α /2.

Nga ana tjetër në ΔBOC kemi se masa e këndit $\widehat{BOC} = 180° - \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$

Por dimë se $\beta + \gamma = 180 - \alpha$

Nga dy barazimet e fundit marrim:

$\widehat{BOC} = 180 - \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° + \frac{\alpha}{2}$

Masa e këndit $\widehat{BOD} = 90° - \frac{\alpha}{2}$ meqenëse është kënd i bashkëmbështetur me $\widehat{BOC}$

Në ΔBOD nxjerrim se $\widehat{DBO} = \frac{\alpha}{2}$

Pra deri tani kemi nxjerrë se $\widehat{DBF} = \widehat{DBO} - \widehat{FBO} = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

(1)

Këndet BFO dhe BDO janë kënddrejtë, kështu trekëndëshat BFO dhe BDO janë të ngjashëm (Rasti I ngjashmërisë) nga ku marrim se këndi $\widehat{FDO}$ = β /2 dhe këndi $\widehat{FDB}$ = 90^0+ β /2.

Në trekëndëshin DFB kemi se $\widehat{DFB} = 180° - [90° + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

Si kënde të kundërt në kulm, del se dhe $\widehat{DFB} = \widehat{AFG} = 90° - \frac{\alpha}{2}$

(2)

Duke u bazuar në bazimin e parë dhe të fundit nxjerrim se pikat D, F, G janë në një drejtëz (koolineare). Në të njëjtën mënyrë arsyetojmë edhe për pikat E, G dhe F, të cilat gjithashtu shtrihen në një drejtëz. Kështu që, pikat D, F, G dhe E janë koolineare dhe DE kalon nga pikat F dhe G. Çfarë donim të vërtetonim.