OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS – SHKOLLA E MESME

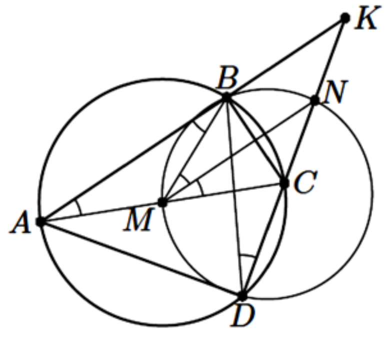
Viti mësimor 2020-2021 Faza e tretë

1. Zgjidhje

Shënojmë $\boldsymbol{N}$ dhe $\boldsymbol{M}$ përkatësisht pikat e meseve të segmenteve $\boldsymbol{KC}$ dhe $\boldsymbol{AC}$. Atëherë $\boldsymbol{MN}$ është vija e mesme në $\Delta\boldsymbol{AKC}$, prandaj $\widehat{\boldsymbol{BAC}} = \widehat{\boldsymbol{NMC}}$. Për më tepër, $\widehat{\boldsymbol{BAC}} = \widehat{\boldsymbol{BDC}}$, meqë katërkëndëshi $\boldsymbol{ABCD}$ është ciklik.

Pikat $\boldsymbol{M}$ dhe $\boldsymbol{N}$ shtrihen në anë të kundërta të drejtëzës $\boldsymbol{BD}$ dhe $\widehat{\boldsymbol{BDC}} = \widehat{\boldsymbol{BMN}}$.

Paralelizmi i $\boldsymbol{MN}$ dhe $\boldsymbol{AK}$ (si vija të mesme) nënkupton që $\widehat{\boldsymbol{BMN}} = \widehat{\boldsymbol{ABM}}$, prej nga $\widehat{\boldsymbol{BAC}} = \widehat{\boldsymbol{BDC}} = \widehat{\boldsymbol{ABM}}$. Prandaj kemi $\boldsymbol{AM} = \boldsymbol{MB}$, domethënë, në $\Delta\ \boldsymbol{ABC}$, mesorja $\boldsymbol{BM}$ është në gjysmën e brinjës **AC**, prej nga $\widehat{\boldsymbol{ABC}} = \boldsymbol{90°}$, dhe kështu $\widehat{\boldsymbol{ADC}} = \boldsymbol{90°}$.



2.

Zgjidhje

Për $\boldsymbol{y = 0}$ marrim : $\boldsymbol{f(x) \cdot f(0) = f(0) + x}$ **(*)**

$\boldsymbol{f(0) \neq 0}$ sepse nqs $\boldsymbol{f(0) = 0}$ atëhere për $\boldsymbol{x = 1}$ duke e zëvendësuar tek **(*)** marrim që **:** $\boldsymbol{f(1) \cdot f(0) = f(0) + 1}$ **,**pra do kemi që $\boldsymbol{0 = 1}$ **?!!**

Meqë $\boldsymbol{f(0) \neq 0}$ **,** për $\boldsymbol{x = 0}$**,** duke e zëvendësuar tek **(*)** marrim që:

$$\boldsymbol{f(0) \cdot f(0) = f(0) + 0 \quad \Leftrightarrow \quad f^2(0) = f(0) \quad \Leftrightarrow \quad f(0) \cdot [f(0) - 1] = 0}$$

nga ku kemi që $\boldsymbol{f(0) - 1 = 0 \Rightarrow f(0) = 1}$**.**

Pra $\boldsymbol{f(0) = 1}$

Duke e zëvendësuar tek **(*)** marrim që :

$\boldsymbol{f(x) = 1 + x}$ **,** $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$ **(*)**

Gjithashtu për $\boldsymbol{f(x) = 1 + x}$ ka vend **(**)** sepse :

$$(1 + x)(1 + y) = 1 + xy + x + y$$

Pra, gjithë funksionet e formës **(*)** plotësojnë kushtin **(**)**

3.

Zgjidhje:

Nga AM-GM marrim që :

$$b + c \geq 2\sqrt{bc} \Rightarrow \frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{2\sqrt{bc}},$$

$$\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} \leq \frac{\sqrt{ab-1}}{2\sqrt{bc}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{ab-1}{bc}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{a}{c}-\frac{1}{bc}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{c}\left(a-\frac{1}{b}\right)} \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{c}+\left(a-\frac{1}{b}\right)}{2}$$

$$\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}+a-\frac{1}{b}\right), \quad (1)$$

nga : $c + a \geq 2\sqrt{ca} \Rightarrow \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2\sqrt{ca}}$

marrim që : $\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+b-\frac{1}{c}\right)$, **(2)** dhe nga :

$a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{2\sqrt{ab}}$ marrim që : $\frac{\sqrt{ca-1}}{a+b} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b}+c-\frac{1}{a}\right)$,

(3) . Nga **(1)** , **(2)** , **(3)** marrim :

$$\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c}+\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a}+\frac{\sqrt{ca-1}}{a+b} \leq \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{c}+a-\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{a}+b-\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{b}+c-\frac{1}{a}\right)\right]$$

Pra

$$\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c}+\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a}+\frac{\sqrt{ca-1}}{a+b} \leq \frac{1}{4}(a+b+c) .$$

4.

Zgjidhje . Meqë dy shahistë luajnë vetëm një lojë ndërmjet tyre atëhere

gjithësej u zhvilluan $\mathbf{C_{10}^{2} = \frac{10!}{8!\cdot 2!} = 45}$ lojra. Nga këto meqë mbi **70%**

përfunduan në barazim ,kemi : **70%** e **45 = 31.5 .**Pra lojra në barzim

përfunduan më pak se $\lceil \mathbf{31.5} \rceil = \mathbf{32}$ **,**ku $\lceil \mathbf{31.5} \rceil$ është pjesa e plotë e **31.5**

jo më e vogël se **31.5.**

Pra **jo më pak se 32 ndeshje përfunduan në barazim.**

Nga kjo rrjedh që **45-32 = 13** ndeshje mund të kenë përfunduar jo në

barazim,pra **jo më shumë se 13 ndeshje përfunduan jo në barazim.**

Supozojmë të kundërtën që 10 shahistët ne fund të turneut kishin

rezultate të ndryshme pikësh.

Nga kjo kemi që më e shumta njëri do të ketë **0**-pikë,pra minimum **9** –

shahistë kanë pikë të ndryshme nga **0** (zero).

Nga parimi Dirihle të paktën **5** –pesë kanë pikë pozitive (ose negative për

simetri).Duke pasur këto të pestë pikë pozitive dhe të ndryshme nga njëri

tjetri (supozimi) atëhere totali i pikëve të tyre do të jetë minimumi :

1 + 2 + 3 +4 +5 = 15 pikë. Por kjo tregon se **15** ndeshje nuk përfunduan në

barazim ,gjë që bie në kundërshtim me faktin se jo më shumë se **13** ndeshje

përfunduan jo në barazim.

Pra supozimi nuk ka vend dhe si rrjedhojë të paktën **2** (dy) shahistë morën

pikë të barabarta.

5.

Zgjidhje .

Nga barazimi $\mathbf{1+\ 2^n+3^n+4^n=10^m}$ **(*)**

shohim mbetjet e pjestimit sipas $(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{3})$

nga ku marrim : $\mathbf{1+\ 2^n+3^n+4^n\equiv 1+(-1)^n+0+1^n}\ (\boldsymbol{mod}\ \mathbf{3})$

dhe $\mathbf{10^m\equiv 1}\ (\boldsymbol{mod}\ \mathbf{3})$ **.** Nga këto marrim që **:**

$(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}\equiv-\mathbf{1}\ (\boldsymbol{mod}\ \mathbf{3})\ \Rightarrow\ \boldsymbol{n}$ **–** është **tek.** Meqë $\boldsymbol{n}$ **–** është **tek** ajo do të jetë e formës : $\boldsymbol{n}=\mathbf{2}\boldsymbol{k}+\mathbf{1}$, $\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}$**.**

Për $\boldsymbol{n}$ **–tek ,** $\boldsymbol{n}>\mathbf{3}$, $\boldsymbol{m}\geq\mathbf{3}$ tek barazimi **(*)** shohim mbetjet e pjestimit sipas $(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{8})$. Kemi :

$\mathbf{1+\ 2^n+3^n+4^n\equiv 1+0+3+0}\ (\boldsymbol{mod}\ \mathbf{8})$ sepse

$\mathbf{3}^{\boldsymbol{n}}=\mathbf{3}^{\mathbf{2}\boldsymbol{k}+\mathbf{1}}=\mathbf{3}\cdot\mathbf{3}^{\mathbf{2}\boldsymbol{k}}$ dhe meqë $\mathbf{3}^{\mathbf{2}\boldsymbol{k}}\equiv\mathbf{1}\ (\boldsymbol{mod}\ \mathbf{8})$ kemi që $\mathbf{3}^{\boldsymbol{n}}\equiv\mathbf{3}(\boldsymbol{mod}\ \mathbf{8})$ **,**

dhe $\mathbf{10^m\equiv 0}\ (\boldsymbol{mod}\ \mathbf{8})$ gjë që sjell që ska mundësi,pra $\boldsymbol{m}<\mathbf{3},\boldsymbol{n}\leq\mathbf{3}$, $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}$

Shohim rastet për $\boldsymbol{n}\in\{\mathbf{1},\mathbf{3}\}$ dhe $\boldsymbol{m}\in\{\mathbf{1},\mathbf{2}\}$**.**

Për $\boldsymbol{n}=\mathbf{1},\boldsymbol{m}=\mathbf{1}$ kemi : $\mathbf{1+\ 2^1+3^1+4^1=10^1}$ pra çifti **(1,1)-**zgjidhje

Për $\boldsymbol{n}=\mathbf{1},\boldsymbol{m}=\mathbf{2}$ dhe për $\boldsymbol{n}=\mathbf{3},\boldsymbol{m}=\mathbf{1}$ s’ka mundësi.

Për $\boldsymbol{n}=\mathbf{3},\boldsymbol{m}=\mathbf{2}$ kemi : $\mathbf{1+\ 2^3+3^3+4^3=10^2}$ pra çifti $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})=(\mathbf{2},\mathbf{3})$ **–**zgjidhje

Pra zgjidhjet do jenë çiftet $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})\in\{\ (\mathbf{1},\mathbf{1}),\ (\mathbf{2},\mathbf{3})\ \}$**.**