REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
DHE SPORTIT
QENDRA E SHËRBIMEVE ARSIMORE
DREJTORIA E VLERËSIMIT

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS
NË ARSIMIN E MESËM TË ULËT

Faza e tretë **Viti shkollor 2023-2024**

ZGJIDHJET

Ushtrimi 1 **10 pikë**

Gjeni rrënjët e plota të ekuacionit $x^2-13=\sqrt[3]{1-27\sqrt[3]{26}+9\sqrt[3]{26^2}}+\sqrt[3]{26}$.

Zgjidhja

Shndërrojmë algjebrikisht shprehjen brenda rrënjës së parë kubike në anën e djathtë të ekuacionit:

$$1-27\sqrt[3]{26}+9\sqrt[3]{26^2}=27-27\sqrt[3]{26}+9\sqrt[3]{26^2}-26=$$

$$=3^3-3\times 3^2\times\sqrt[3]{26}+3\times 3\times\left(\sqrt[3]{26}\right)^2-\sqrt[3]{26^3}= \quad \text{(zbërthimi i kubit të binomit)}$$

$$=\left(3-\sqrt[3]{26}\right)^3$$

Kështu që kemi:

$$x^2-13=\sqrt[3]{\left(3-\sqrt[3]{26}\right)^3}+\sqrt[3]{26}\Leftrightarrow x^2-13=3-\sqrt[3]{26}+\sqrt[3]{26}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-13=3\Leftrightarrow x^2=16\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\pm 4\in Z$$

©QSHA

Ushtrimi 2 **10 pikë**

Provoni se ka një pafundësi numrash natyrorë *a*, të tillë që prodhimi $a(a+1)$ mund të shkruhet si shumë e dy katrorëve të plotë, në të paktën dy mënyra të ndryshme.

(Rastet m^2+n^2 dhe n^2+m^2 konsiderohen si paraqitje identike).

Zgjidhja

Le të shënojmë $P=a(a+1)$.

Shqyrtojmë rastin kur: $a=m^2$. Është evidente që ***P*** shkruhet si shumë e dy katrorëve të plotë, pasi:
$P=m^2(m^2+1)=m^4+m^2=(m^2)^2+m^2$.

Për më tepër, nëse m^2 në vetvete shkruhet si shumë e dy katrorëve të plotë, le të themi në trajtën:
$m^2=p^2+q^2$, atëherë kemi: $P=(p^2+q^2)(m^2+1)=(pm+q)^2+(p-qm)^2$.

Vihet re se paraqitjet e ***P*** në këtë rast si shumë e dy katrorëve të plotë, janë dy paraqitje të ndryshme nga njëra tjetra.

P.sh: nëse marrim:

$m=5k,\ p=3k,\ q=4k,\ ku\ k\in N$, atëherë në këtë rast kemi: $a=m^2=25k^2$ dhe
$P=(25k^2)^2+(5k)^2=(15k^2+4k)^2+(20k^2-3k)^2$ **(*)**

Siç vihet re, për çdo $k\in N$, ne përftojmë një pafundësi vlerash të plota pozitive të trajtës $a(a+1)$, të cilat shkruhen si shumë e dy katrorëve të plotë në të paktën dy trajta të ndryshme, të cilat janë shprehur në barazimin **(*).**

©QSHA

Ushtrimi 3 **10 pikë**

Trapezi kënddrejtë $ABCD$, në të cilin AB është paralel me DC dhe pingul me AD, e ka syprinën $4\ cm^2$ dhe $AB = 3DC$. Nëse trapezit $ABCD$ i brendashkruhet një rreth, gjeni gjatësinë e rrezes së tij.

Zgjidhja

Le të shënojmë $M,\ N,\ P,\ Q$ pikat e tangjencës së rrethit të brendashkruar trapezit, përkatësisht me brinjët

$AB,\ BC,\ CD\ dhe\ AD.$

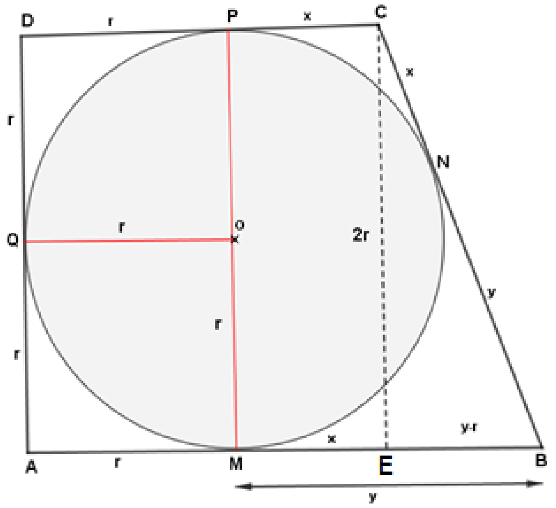
Meqenëse $AB \uparrow\uparrow DC$ dhe

$AB \perp AD \Rightarrow DC \perp AD$, nga veti të tangjencës kemi:

$AM = AQ = QD = DP = r$.

Nga vetitë e tangjenteve ndaj rrethit që dalin nga një pikë jashtë tij kemi:

$BM = BN = y,\ CN = CP = x,\ DP = DQ = r$.



Meqenëse $AB = 3DC \Rightarrow r + y = 3(r + x) \Leftrightarrow 2r = y - 3x \Leftrightarrow y = 2r + 3x$ $\quad (1)$

Gjithashtu:

$$S_{ABCD} = 4\ cm^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}AD(AB + CD) = 4 \Leftrightarrow r(r + y + r + x) = 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r(2r + x + y) = 4 \qquad (2)$$

Zëvendësojmë (1) te (2) dhe kemi:

$$r(2r + x + y) = 4 \Leftrightarrow r(2r + x + 2r + 3x) = 4 \Leftrightarrow \mathrm{r}(r + x) = 1 \qquad (3)$$

Zbatojmë teoremën e Pitagorës në ΔCEB.

$$BC^2 = EB^2 + CE^2 \Leftrightarrow (y + x)^2 = (y - x)^2 + (2r)^2 \Leftrightarrow r^2 = xy \qquad (4)$$

Zëvendësojmë (1) tek barazimi (4), kemi:

$r^2 = x(2r + 3x) \Leftrightarrow r^2 - 2rx - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow (r - 3x)(r + x) = 0$, nga ku: $(r - 3x) = 0\ ose\ (r + x) = 0$.

Pra $r = 3x$. $\quad (5)$

Zëvendësojmë (5) tek barazimi (3) dhe kemi $3x(3x + x) = 1 \Leftrightarrow 12x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2}cm$

©QSHA

Ushtrimi 4 **10 pikë**

Jepen numrat realë $x,\ y,\ z$ dhe $p,\ q,\ r$ të tillë që $x+p\geq y+q\geq z+r\geq 0$ dhe $x+y+z=p+q+r$.

Tregoni se ka vend mosbarazimi $qx+py\geq xz+pr$.

Zgjidhja

Do provojmë se $qx+py\geq xz+pr \Leftrightarrow qx+py-xz-pr\geq 0$.

Transferojmë anën e majtë të mosbarazimit, duke marrë parasysh se:

$x+p\geq y+q\geq z+r\geq 0$ dhe $x+y+z=p+q+r$:

Kemi:

$$
\begin{aligned}
qx+py-xz-pr &= x(q-z)+p(y-r)= \\
&= x(x+y-p-r)+p(y-r)= \\
&= x(x-p)+(x+p)(y-r)= \\
&= \frac{1}{2}(x-p)^2+\frac{1}{2}(x^2-p^2)+(x+p)(y-r)= \\
&= \frac{1}{2}(x-p)^2+\frac{1}{2}(x+p)(x+2y-p-2r)= \\
&= \frac{1}{2}(x-p)^2+\frac{1}{2}(x+p)(y-z+q-r)= \\
&= \frac{1}{2}(x-p)^2+\frac{1}{2}(x+p)\left[(y+q)-(z+r)\right]\geq 0
\end{aligned}
$$

Mosbarazimi i fundit qëndron, pasi siç shihet kemi: $\frac{1}{2}(x-p)^2\geq 0, \forall\ x,\ p\in R$

dhe meqenëse nga kushti $y+q\geq z+r$, kuptohet se $\frac{1}{2}(x+p)\left[(y+q)-(z+r)\right]\geq 0$

Pra, $qx+py\geq xz+pr$.

Barazimi arrihet kur $x=p;\ y=r;\ z=q\ dhe\ 2p\geq q+r\geq 0$

©QSHA

Ushtrimi 5 **10 pikë**

Në vitin 1887 mosha e një burri ishte e tillë që, shuma e shifrave të moshës se tij ishte sa shuma e shifrave të vitit të lindjes. Në ç'vit ka lindur ky burrë?

Zgjidhja

Meqenëse viti i lindjes së këtij burri është një numër $4-shifror$, ku secila shifër nuk mund të jetë më e madhe se 9, ai ka lindur në shekullin $XIX-të$, pra në vitin $18\square\square$. Kjo do të thotë se shuma e shifrave të moshës së tij në vitin 1887 nuk është më e madhe se 36.

Le të shënojmë $x-$numrin e dhjetësheve të vitit të lindjes dhe me $y-$numrin e njësheve të këtij viti.

Nga kushti kemi:

$$1+8+x+y=87-(10x+y)\Leftrightarrow x+y=78-10x-y\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 11x+2y=78 \qquad (1)$$

Në barazimin (1) është e qartë se $2y\leq 18\ dhe\ 11x>60$.

Pra vlera më e madhe e $2y-it$ është 18, $11x>60\ dhe\ x,y\in N$.

Ose më qartë: $x=6+\frac{12-2y}{11},\ x;y\in N\Rightarrow y=6\ dhe\ x=6$

Kështu që $x=6\ dhe\ y=6$.

Pra ky burrë ka qenë $66-vjeç$ në vitin 1887, ndaj ai ka lindur në vitin $1887-66=1821$.

Shënim: Pranohet çdo zgjidhje tjetër, që nuk është parashikuar më lart, të cilën komisioni i vlerësimit e gjykon si të saktë.

©QSHA