OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS
NË ARSIMIN E MESËM TË LARTË

Faza e tretë **Viti shkollor 2023-2024**

ZGJIDHJET

Ushtrimi 1 **10 pikë**

Zgjidhni ekuacionin $4+5\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)+2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{1-x^2}\right)=0$.

Zgjidhja

$$4+5\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)+2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{1-x^2}\right)=0 \qquad (1)$$

Ekuacioni ynë është i zgjidhshëm për $x \in R / \begin{cases} 1-x^2>0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left]-1;0\right[\cup \left]0;1\right[$.

Zëvendësojmë:

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=t \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x^2}=\frac{1}{t^2} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}=\frac{1}{t^2}+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{t^2}{t^2+1}$$

Duke kryer zëvendësimet përkatëse tek ekuacioni (1), kemi;

$$4+5\left(\frac{1}{t}+t\right)+2\left(\frac{t^2+1}{t^2}+t^2\right)=0 \Leftrightarrow 4+\frac{5+5t^2}{t}+\frac{2+2t^2+2t^4}{t^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2t^4+5t^3+6t^2+5t+2=0 \Leftrightarrow (t+1)^2\left(2t^2+t+2\right)=0$$

Vëmë re se:

$\forall t \in R \Rightarrow 2t^2 + t + 2 > 0 \Rightarrow (t+1)^2 \left(2t^2 + t + 2\right) = 0 \Leftrightarrow (t+1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = -1$

Për $t = -1$ kemi: $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \in \left]-1;0\right[\cup \left]0;1\right[$,

ku $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ është rrënjë e ''huaj'', ndaj zgjidhje e ekuacionit të dhënë është vetëm $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ushtrimi 2 10 pikë

Një numër natyror n quhet numër ''*besnik*'', nëse ekzistojnë numrat natyrorë $a,\ b,\ c,$ të tillë që:
$a<b<c$; $n=a+b+c$ dhe a është pjesëtues i b ; b është pjesëtues i c.
Tregoni se përveç disave, të gjithë numrat natyrorë janë numra ''*besnikë*''.
Gjeni shumën e gjithë numrave natyrorë '' jo *besnikë*''.

Zgjidhja

Supozojmë se një numër $n\in N / n$ është ''*besnik*''. Shqyrtojmë numrin kn, ku $k\in N$.
Meqenëse nga kushti kemi:

$$\begin{cases} n=a+b+c \\ a<b<c \\ a \text{ është pjesëtues i } b \\ \text{b është pjesëtues i c} \end{cases},$$

atëherë ka vend barazimi : $kn=ka+kb+kc$, pra numri kn është ''*besnik*'' (1).

Marrim në shqyrtim numrin e thjeshtë (prim) $p/p>5$, atëherë numri p është tek dhe ai mund të shkruhet në trajtën: $p=(p-3)+2+1$, çka tregon se çdo numër prim $p/p>5$ përmbush kushtet për të qenë ''*besnik*''.

N.q.se: $n\in N$ çfarëdo, përmban një faktor të thjeshtë $p>5$, atëherë nga sa thamë më sipër (1), kuptohet që n është ''*besnik*''.

Kuptojmë se: Një numër natyror për të mos qenë ''*besnik*'', duhet të zbërthehet në trajtën:

$n=2^{\alpha}\times 3^{\beta}\times 5^{\lambda}$.

Po të kontrollojmë konkretisht faktorët $2^4; 3^2\, dhe\ 5^2$, ata janë ''*besnikë*'', pasi $2^4=16=12+3+1$,

$3^2=9=6+2+1$ dhe $5^2=25=22+2+1$.

Kështu që çdo numër natyror n për të qenë ''*besnik*'', mjafton që në zbërthimin e tij në faktorë të thjeshtë, të përmbajë një faktor $2^{\alpha},\ ku\ \alpha\geq 4$; një faktor $3^{\beta},\ ku\ \beta\geq 2$ ose $5^{\lambda},\ ku\ \lambda\geq 2$.

Pra numrat natyrorë, të cilët janë ''*jo besnikë'' janë të trajtës*: $n=2^{\alpha}\times 3^{\beta}\times 5^{\lambda}$, ku $\alpha\leq 3,\ \beta\leq 1\ dhe\ \lambda\leq 1$.

Në këto kushte, përftojmë numrat: $1;\ 2,\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ 15;\ 20;24;\ 30;\ 40;\ 60;\ 120$, nga të cilët numrat

$10;\ 15;\ 20;\ 30;\ 40;\ 60;\ 120$ janë ''*besnikë*'', sepse:

$10=6+3+1$

$15=12+2+1$

$20=12+6+2$

$30=18+9+3$

$40=36+3=1$

$60=48+8+4$

$120=112+7+1$

Kështu që: $\{n\in N / n-\text{" } jo \text{ besnik"}\}=\{1,2,3,4,5,6,8,12,24\}$, shuma e të cilëve është 65.

Ushtrimi 3 **10 pikë**

Provoni se mosbarazimi $\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2}\geq 2$ është i vërtetë për çdo $x,\ y,\ z>-1$.

Zgjidhja

Kanë vend mosbarazimet:

$$1+y+z^2\geq 1+y>0$$

$$1+y+z^2\leq \frac{1+y^2}{2}+1+z^2$$

Kështu që $\frac{1+x^2}{1+y+z^2}\ \geq\ \frac{2\left(1+x^2\right)}{1+y^2+2\left(1+z^2\right)}\ldots$

Zëvendësojmë $1+x^2=a;\ 1+y^2=b\ dhe\ 1+z^2=c$. Kështu që mjafton të tregojmë se:

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\geq 1$$

Duke shfrytëzuar mosbarazimin Chauchy-Schwarz, kemi:

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}=\frac{a^2}{a\left(b+2c\right)}+\frac{b^2}{b\left(c+2a\right)}+\frac{c^2}{c\left(a+2b\right)}\geq\frac{\left(a+b+c\right)^2}{a\left(b+2c\right)+b\left(c+2a\right)+c\left(a+2b\right)}=\frac{\left(a+b+c\right)^2}{3\left(ab+bc+ac\right)}\geq 1$$

Pra vërtet që: $\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\geq 1$.

Barazimi arrihet atëherë dhe vetëm atëherë kur: $x=y=z=1$.

Ushtrimi 4 **10 pikë**

Jepet funksioni $f: y=\dfrac{12x^2-12ax}{x^2+36},\ a\in Z$.

Për ç'vlera të parametrit a , maksimumi dhe minimumi i funksionit $y=f\left(x\right)$ janë numra të plotë.

Zgjidhja

Nga funksioni i dhënë $y=\dfrac{12x^2-12ax}{x^2+36},\ a\in Z;\ x\in R$, kemi:

$$y=\frac{12x^2-12ax}{x^2+36}\Leftrightarrow\left(x^2+36\right)y-\left(12x^2-12ax\right)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(y-12\right)x^2+12ax+36y=0 \qquad (1)$$

Ekuacioni (1) parë si ekuacion kuadratik në lidhje me $x-in$, ka zgjidhje në R, atëherë dhe vetëm atëherë kur:

$$D\geq 0\Leftrightarrow 12^2a^2-4\times 36y\times\left(y-12\right)\geq 0\Leftrightarrow 12^2\left(a^2-y^2+12y\right)\geq 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left(a^2-y^2+12y\right)\geq 0\Leftrightarrow y^2-12y-a^2\leq 0 \qquad (2)$$

Mosbarazimi (2) është i vërtetë për $6-\sqrt{36+a^2}\leq y\leq 6+\sqrt{36+a^2}$.

Meqenëse funksioni ynë është i vazhdueshëm në R, ai ka minimum dhe maksimum në skajet e segmentit

$$\left[6-\sqrt{36+a^2};6+\sqrt{36+a^2}\right].$$

Nga ana tjetër, kërkohet që ekstremumet të jenë numra të plotë, rrjedhimisht binomi $36+a^2$ duhet të jetë katror i plotë.

Shënojmë: $36+a^2=k^2\Leftrightarrow\left(k-a\right)\left(k+a\right)=36$

Marrim një zbërthim çfarëdo të $36-ës$: $36=mn,\ ku\ m,n\in N$, atëherë:

$$a=\frac{1}{2}\left(m-n\right)\ dhe\ k=\frac{1}{2}\left(m+n\right).$$

Meqenëse $a,\ k\in Z$, do të thotë se $m\ dhe\ n$ janë të dy numra tekë ose të dy çift.

Rrjedhimisht shqyrtojmë dy mundësitë: $36 = 6 \times 6 \ ose \ 36 = 2 \times 18$

Nëse: $m = n = 6 \Rightarrow a = 0$, nga ku $x^2 = -\dfrac{36y}{y-12}$, i cili ka zgjidhje atëherë dhe vetëm atëherë nëse $0 \le y \le 12$

Meqenëse jemi të interesuar për vlerat në maksimumin dhe minimumin e funksionit $y = f\left(x\right) \ \Rightarrow a \neq 0$, mbetet të shqyrtojmë faktorizimin e trajtës $36 = 2 \times 18$, nga i cili përftojmë $a = \pm 8 \ dhe \ k = 10$.

Pra vlerat e kërkuara të $a - së$ janë: $a = -8 \ ose \ a = +8$.

Për më qartë:

Për $a = -8 \Leftrightarrow f\left(x\right) = \dfrac{12x^2 + 96x}{x^2 + 36}, x \in R$, kemi: $Min\left(-3;-4\right) \ dhe \ Max\left(12;16\right)$

Për : $a = 8 \Leftrightarrow f\left(x\right) = \dfrac{12x^2 - 96x}{x^2 + 36}, x \in R$, kemi $Min\left(3;-4\right) \ dhe \ Max\left(-12;16\right)$

Ushtrimi 5 **10 pikë**

Një rreth me diametër AC pritet nga një drejtëz (l) në pikat $B\ dhe\ D$. Kjo drejtëz dhe diametri AC priten në pikën T jashtë rrethit. Nga skajet e diametrit ndërtohen pinulet $AE\ dhe\ CF$ me drejtëzën (l).

Nëse $EB = 2\ cm\ dhe\ BD = 6\ cm$, gjeni gjatësinë e segmentit DF.

Zgjidhje e ushtrimit 5

Bashkojmë $AD\ dhe\ CB$. Këndet $A\hat{D}C\ dhe\ A\hat{B}C$ janë kënde rrethorë që hapen në diametër, ndaj $m\left(A\hat{D}C\right) = m\left(A\hat{B}C\right) = 90^0$.

$m\left(F\hat{D}C\right) + m\left(E\hat{D}A\right) = 90^0\ dhe\ m\left(F\hat{C}D\right) + m\left(F\hat{D}C\right) = 90^0$, prandaj $m\left(E\hat{D}A\right) = m\left(F\hat{C}D\right)$ si plotësues të këndit $F\hat{D}C$.

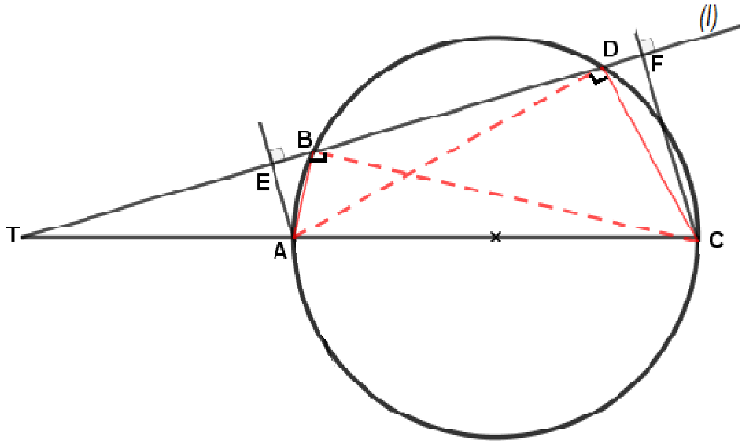
Kështu që prej rastit të parë të ngjashmërisë, kemi ngjashmërinë e trekëndëshave kënddrejtë: $\Delta DFC \sim \Delta AED$,

prej nga kemi:

$$\frac{DF}{AE} = \frac{CF}{ED} \Leftrightarrow AE \times FC = DF \times ED \qquad (1)$$

Gjithashtu, $m\left(B\hat{A}E\right) + m\left(A\hat{B}E\right) = 90^0\ dhe\ m\left(C\hat{B}F\right) + m\left(A\hat{B}E\right) = 90^0$, kështu që $m\left(B\hat{A}E\right) = m\left(C\hat{B}F\right)$ si plotësues të këndit $A\hat{B}E$.

Kështu që kemi ngjashmërinë e trekëndëshave kënddrejtë:



$$\Delta AEB \sim \Delta BFC \Rightarrow \frac{BE}{CF} = \frac{AE}{BF} \Leftrightarrow AE \times FC = BE \times BF \qquad (2)$$

Nga barazimet $(1)\ dhe\ (2)$ kemi $DF \times ED = BE \times BF$.

Duke zëvendësuar të dhënat, kemi:

$$DF \times 8 = 2 \times \left(DF + 6\right) \Leftrightarrow 6DF = 12 \Leftrightarrow DF = 2\ cm.$$

Shënim: Pranohet çdo zgjidhje tjetër, që nuk është parashikuar më lart, të cilën komisioni i vlerësimit e gjykon si të saktë.