REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
DHE SPORTIT
QENDRA E SHËRBIMEVE ARSIMORE
DREJTORIA E VLERËSIMIT

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS

Klasa 9 | Faza e dytë | Viti shkollor 2023-2024

ZGJIDHJE

Ushtrimi 1 *Vlerësimi i plotë 10 pikë*

Zgjidhni sistemin e ekuacioneve $\begin{cases} 2^x = 1 - y \\ 8^x = 37 - y^3 \end{cases}$.

Zgjidhje e ushtrimit 1

$$\begin{cases} 2^x + y - 1 = 0 \\ 8^x + y^3 - 37 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x + y = 1 \\ 2^{3x} + y^3 = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 - y \\ (1-y)^3 + y^3 = 37 \end{cases}$$

Zgjidhim ekuacionin e dytë të sistemit në varësi të y (me formulë kuadratike):

$$(1-y)^3 + y^3 = 37 \Leftrightarrow 1 - 3y + 3y^2 - y^3 + y^3 = 37 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3y^2 - 3y - 36 = 0 \Leftrightarrow y^2 - y - 12 = 0$$

$$D = 1 + 48 = 49 \Rightarrow_1 y_2 = \frac{1 \pm 7}{2} \Rightarrow y_1 = 4;\ y_2 = -3$$

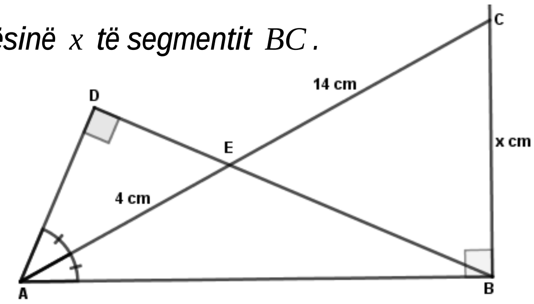
Zëvendësojmë tek ekuacioni i parë i sistemit:

$2^x = 1 - 4 \ ose\ 2^x = 1 - (-3) \Leftrightarrow 2^x = -3 \ ose\ 2^x = 4$. Meqenëse $2^x > 0,\ \forall x \in R$, atëherë $x = 2$.

Kështu që zgjidhje e sistemit të dhënë është çifti $(2; -3)$.

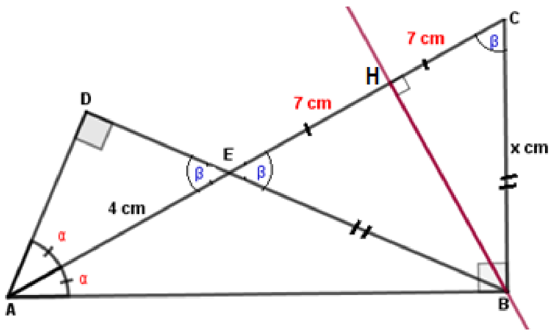
Ushtrimi 2 Vlerësimi i plotë 10 pikë

Bazuar tek të dhënat e figurës së paraqitur në skicë, gjeni gjatësinë x të segmentit BC.



Zgjidhje e ushtrimit 2

Prej figurës së dhënë kemi:



$\Delta ADB \ dhe \ \Delta ABC$ janë kënddrejtë përkatësisht në kulmet $D \ dhe \ B$.

$AE = 4\ cm,\ EC = 14\ cm$ dhe AE është përgjysmore e këndit $D\hat{A}B$.

Le të shënojmë $m\left(D\hat{A}E\right) = m\left(E\hat{A}B\right) = \alpha \ dhe \ m\left(A\hat{C}B\right) = \beta$.

Kuptohet se këndet $\alpha \ dhe \ \beta$ janë kënde plotësues si kënde të ngushtë të trekëndëshit kënddrejtë ΔABC: $\left(\alpha + \beta = 90^0\right)$.

Për këtë arsye kemi se, në trekëndëshin kënddrejtë $\Delta ADE \ \Rightarrow m\left(A\hat{E}D\right) = \beta$. Nga ana tjetër, si kënde të kundërt në kulm, kemi se $m\left(A\hat{E}D\right) = m\left(B\hat{E}C\right) = \beta \Rightarrow \Delta BEC$ është dybrinjënjëshëm me kulm në B.

Ndërtojmë lartësinë $BH \perp EC$. Nga vetia e lartësisë mbi bazën e trekëndëshit dybrinjënjëshëm, kemi:

$$BH \perp EC \Rightarrow BH - mesore \Rightarrow EH = HC = \frac{14cm}{2} = 7cm$$

Zbatojmë Teoremën e Euklidit në trekëndëshin kënddrejtë ΔABC:

$$BC^2 = CH \times AC \Leftrightarrow BC^2 = 7 \times (14 + 4) \Leftrightarrow BC^2 = 126 \Leftrightarrow BC = 3\sqrt{14}cm.$$

- Nxënësi mund të arsyetojë edhe përmes ngjashmërisë së trekëndëshave $\Delta ABC \ dhe \ \Delta BCH$.

Ushtrimi 3   Vlerësimi i plotë 10 pikë

Gjeni gjithë çiftet e renditur të numrave të plotë $(x;y)$, $y>1$, për të cilat ka vend barazimi
$x^2-yx^2+2x-y+2=0$.

Zgjidhje e ushtrimit 3

Jepet ekuacioni $x^2-yx^2+2x-y+2=0$.

Shndërrojmë ekuacionin në trajtë kuadratike, në lidhje me ndryshoren x :

$$x^2-yx^2+2x-y+2=0 \Leftrightarrow (y-1)x^2-2x+y-2=0$$

Meqenëse $y>1 \Leftrightarrow y-1>0$ dhe nga fakti se ekuacioni i dhënë ka zgjidhje atëherë dhe vetëm atëherë kur $D \geq 0$, kemi:

$$D \geq 0 \Leftrightarrow 4-4(y-1)(y-2) \geq 0 \Leftrightarrow y^2-3y+1 \leq 0,\ ku\ y>1.$$

Zgjidhim inekuacionin (në lidhje me y-in), kemi:

$D' = 5$. Rrënjët janë: $y_{1;2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Nga ku: $y^2-3y+1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq y \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Meqenëse: $\mathrm{y} \in \mathrm{Z} /\ y>1$, dhe $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq y \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, del se $y=2$ $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2{,}62 \text{ dhe } \mathrm{y} \in \left]1;\ 2{,}62\right]\right)$.

Kështu që, për: $y=2$, duke zëvendësuar tek ekuacioni i dhënë, kemi:
$x^2-2x=0 \Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow x_1=0\ ose\ x_2=2$

Pra zgjidhje të ekuacionit të dhënë janë çiftet $(0;2)\ dhe\ (2;2)$.

Ushtrimi 4 Vlerësimi i plotë 10 pikë

Dy programues $A\ dhe\ B$ kanë ndërmarrë një projekt së bashku. Programuesi B e nis punën një ditë e gjysmë pas programuesit A, dhe të dy e mbarojnë projektin për $7\ ditë$.

Nëse ky projekt do u jepej secilit veçmas njëri-tjetrit, atëherë programuesit A do ti duheshin $3\ ditë$ më shumë se programuesit B për të përfunduar këtë projekt.

Për sa ditë e realizon këtë projekt secili prej programuesve?

Zgjidhje e ushtrimit 4

Le të supozojmë se programuesi B e përfundon i vetëm projektin për $x-dit\ddot{e}$, atëherë programuesi A e përfundon i vetëm këtë projekt për $(x+3)-dit\ddot{e}$.

Duke e marrë punën për realizimin e projektit në fjalë, si $1-\ nj\ddot{e}si$, atëherë është e qartë se në një ditë programuesi A kryen $\frac{1}{x+3}$ pjesë të projektit dhe programuesi B kryen $\frac{1}{x}$ të projektit.

Nga ana tjetër, për $\left(\frac{3}{2}\right)dit\ddot{e}$, muratori A kryen $\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{x+3}\right)$ pjesë të punës dhe pjesën e mbetur të punës ata e kryejnë së bashku për $\left(7-\frac{3}{2}\right)=\frac{11}{2}$ ditë, që përbën $\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x}\right)\times\frac{11}{2}$ pjesë të punës. Kështu që kemi:

$$\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x}\right)\times\frac{11}{2}+\left(\frac{1}{x+3}\right)\times\frac{3}{2}=1$$

Zgjidhim ekuacionin:

$$\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x}\right)\times\frac{11}{2}+\left(\frac{1}{x+3}\right)\times\frac{3}{2}=1\Leftrightarrow\frac{2x+3}{x(x+3)}\times\frac{11}{2}+\frac{1}{x+3}\times\frac{1}{2}=1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-19x-33=0\Leftrightarrow(x-11)(2x+3)=0$$

Kuptohet që zgjidhje e situatës sonë është $x=11$, pra programuesi B e kryen projektin për 11 ditë, rrjedhimisht programuesi A do e kryejë këtë projekt për $x+3=14$ ditë.

Ushtrimi 5 Vlerësimi i plotë 10 pikë

Jepet bashkësia T e trekëndëshave kënddrejtë, ku secili prej tyre i ka gjatësitë e brinjëve shprehur me numra natyrorë dhe njërin katet me gjatësi $21\ cm$.

Sa është probabiliteti që një trekëndësh i zgjedhur rastësisht nga kjo bashkësi, të ketë syprinën më të madhe të mundshme?

Zgjidhje e ushtrimit 5

Le të jenë $a\ dhe\ b$ katetet për një trekëndësh çfarëdo të bashkësisë T dhe $c-$ hipotenuza e tij. Supozojmë se $b = 21\ cm$. Nga Teorema e Pitagorës, për çdo element nga bashkësia T kemi:

$$c^2 - a^2 = 21^2 \Leftrightarrow (c-a)\times(c+a) = 3\times3\times7\times7 \qquad (1).$$

Duke ditur se: $(c-a)\in N,\ (c+a)\in N,\ c>a\ pra\ c+a>c-a$, atëherë kemi këto raste që diktohen nga vërtetësia e barazimit (1): $\begin{cases} c-a=1 \\ c+a=441 \end{cases}$ *ose* $\begin{cases} c-a=3 \\ c+a=147 \end{cases}$ *ose* $\begin{cases} c-a=9 \\ c+a=49 \end{cases}$ *ose* $\begin{cases} c-a=7 \\ c+a=63 \end{cases}$

Duke zgjidhur secilin prej sistemeve më sipër, përftojmë gjithsej 4-trekëndëshat kënddrejtë si elementë bashkësisë T, të cilët i kanë brinjët me gjatësi si më poshtë:

$$\begin{cases} c=221\ cm \\ a=220\ cm \\ b=21\ cm \end{cases} ose \begin{cases} c=75\ cm \\ a=72\ cm \\ b=21\ cm \end{cases} ose \begin{cases} c=29\ cm \\ a=20\ cm \\ b=21\ cm \end{cases} ose \begin{cases} c=35\ cm \\ a=28\ cm \\ b=21\ cm \end{cases}$$

Pra, numri i elementeve të hapësirës: $n(T)=4$

Ngjarja e kërkuar A:" Trekëndëshi i zgjedhur nga bashkësia T, ka syprinën më të madhe", është e tillë që $n(A)=1$, kështu që $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(T)}=\dfrac{1}{4}=0,25=25\%$.

- Syprinat e trekëndëshave janë përkatësisht $2310\ cm^2$, $756\ cm^2$, $210\ cm^2\ dhe\ 294\ cm^2$. Kështu që trekëndëshi me syprinën më të madhe është trekëndëshi me përmasat:

$$\begin{cases} c=221\ cm \\ a=220\ cm \\ b=21\ cm \end{cases}$$

Shënim: Pranohet çdo zgjidhje tjetër e saktë, që nuk është parashikuar më lart, të cilin komisioni i vlerësimit e gjykon si të tillë.