REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
DHE SPORTIT
QENDRA E SHËRBIMEVE ARSIMORE
DREJTORIA E VLERËSIMIT

# OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS

Klasa 12 Faza e dytë Viti shkollor 2023-2024

## ZGJIDHJE

*Ushtrimit 1 Vlerësimi i plotë 10 pikë*

*Jepet polinomi* $P(x)=x^{10}+2x^9-2x^8-2x^7+x^6+3x^2+6x+1,\ x\in R$. *Tregoni se mbetja e pjesëtimit të polinomit* $P(x)$ *me* $\left(x+1-\sqrt{2}\right)$ *është* $4$.

Zgjidhje e ushtrimit 1

Që mbetja e pjesëtimit të polinomit $P(x)=x^{10}+2x^9-2x^8-2x^7+x^6+3x^2+6x+1,\ x\in R$, me $\left(x+1-\sqrt{2}\right)$ të jetë 4, mjafton të tregojmë se $x=\sqrt{2}-1$ nuk është rrënjë e polinomit, pra $P\left(\sqrt{2}-1\right)=4$.

Nisemi nga: $x=\sqrt{2}-1 \Leftrightarrow (x+1)^2=2 \Leftrightarrow (x+1)^2-2=0 \Leftrightarrow x^2+2x-1=0$

Kështu që faktorizojmë në mënyrë të përshtatshme polinomin tonë si vijon:

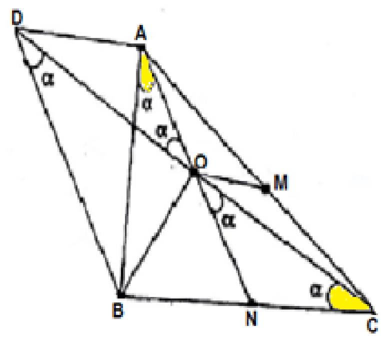
$$P(x)=x^{10}+2x^9-2x^8-2x^7+x^6+3x^2+6x+1$$
$$P(x)=x^8\left(x^2+2x-1\right)-x^6\left(x^2+2x-1\right)+3\left(x^2+2x-1\right)+4$$
$$P(x)=\left(x^2+2x-1\right)\left(x^8-x^6+3\right)+4=0\times\left(x^8-x^6+3\right)+4=4$$

Ç'donim të provonim.

*Ushtrimit 2 Vlerësimi i plotë 10 pikë*

*Jepet trekëndëshi $\Delta ABC$ dhe një pikë $O$ në pjesën e brendshme të planit të tij. Pika $O$ është e tillë që $m\left(B\hat{O}C\right)=90^0$ $dhe$ $m\left(B\hat{A}O\right)=m\left(B\hat{C}O\right)$. Le të jenë $M$ $dhe$ $N$ përkatësisht meset e brinjëve $AC$ $dhe$ $BC$. Duke supozuar se $OB=2OM$, provoni se pikat $A,\ O,\ N$, janë koolineare (ndodhen në një drejtëz).*

Zgjidhje e ushtrimit 2:




Zgjasim segmentin $CO$ deri në pikën $D$, në mënyrë të tillë që $CO=OD$. Shënojmë $m\left(B\hat{A}O\right)=m\left(B\hat{C}O\right)=\alpha$

Vëmë re se $BO$ është përmesore e segmentit $DC$, pasi $CO=OD$ dhe $m\left(B\hat{O}C\right)=90^0$. Kështu që trekëndëshi $\Delta DBC$ është dybrinjënjëshëm me kulm në B, si rrjedhim këndi $B\hat{D}O=\alpha$.

Nga ana tjetër $m\left(B\hat{D}O\right)=\alpha=m\left(B\hat{A}O\right)$. Kjo do të thotë se pikat $B,\ O,\ A,\ D$ ndodhen në një rreth.

Kështu që kemi $m\left(D\hat{A}B\right)=m\left(D\hat{O}B\right)=90^0$.

Meqenëse $O$ është mesi i segmentit $DC$ dhe $M$ është mesi i segmentit $AC$, rrjedh se $OM$ është vijë e mesme për $\Delta DAC$, nga ku rrjedh se $MO \uparrow\uparrow AD$ $dhe$ $AD=2MO=BO$.

Kështu që katërkëndëshi $DBOA$ është trapez dybrinjënjëshëm, ku $AD=BO$.

Si rrjedhim kemi: $m\left(D\hat{O}A\right)=m\left(B\hat{A}O\right)=m\left(B\hat{C}O\right)=m\left(N\hat{O}C\right)$.

Sepse $m\left(B\hat{O}C\right)=90^0$ dhe $N$ është mesi i segmentit $BC$, atëherë $NO=NC=NB$ në trekëndëshin kënddrejtë $\Delta BOC$.

Kjo do të thotë se pikat $A,\ O$ $dhe$ $N$ ndodhen në një drejtëz, pra janë koolineare.

*Ushtrimit 3 Vlerësimi i plotë 10 pikë*

Duke nisur me numrin $49$ si kufizë e parë, ndërtohet vargu si vijon: Vendoset mes shifrës $4$ dhe $9$ numri $48$, fitohet kufiza e dytë $a_2 = 4489$. Duke vazhduar më tej në këtë mënyrë, pra duke vendosur numrin $48$ në *qendër* të kufizës paraardhëse, fitohet vargu i numrave: $49;\ 4489;\ 444889;\ 44448889\ldots$. Provoni se çdo kufizë e një vargu të tillë është katror i plotë.

Zgjidhje e ushtrimit 3:

Sipas rregullit të ndërtimit të këtij vargu, çdo kufizë e tij ka në numër çift shifrash. Le të shqyrtojmë një kufizë çfarëdo $2n$ – shifror. Një numër i tillë e ka trajtën: $\underbrace{4444...}_{n}\underbrace{888}_{n-1}....9$, kështu që një numër të tillë mund ta shkruajmë:

$$\underbrace{4444...}_{n}\underbrace{888}_{n-1}....9 = 4\times\underbrace{111...1}_{n}\times 10^n + 8\times\underbrace{111...1}_{n-1} + 8 + 1 =$$

$$= 4\times\underbrace{111...1}_{n}\times 10^n + 8\times\underbrace{111...1}_{n} + 1$$

Nga ana tjetër $\underbrace{111...1}_{n} = \underbrace{10^{n-1} + 10^{n-2} + ... + 10^2 + 10 + 1}_{n-kufiza\ të\ vargut\ gjeometrik\ me\ kufizë\ të\ parë\ 1\ dhe\ herës\ 10} = \frac{10^n - 1}{10 - 1} = \frac{10^n - 1}{9}$

Kështu që kemi:

$$\underbrace{4444...}_{n}\underbrace{888}_{n-1}....9 = \underbrace{4444...}_{n}\underbrace{888...8}_{n} + 1 = \frac{4}{9}\times\left(10^n - 1\right)\times 10^n + \frac{8}{9}\times\left(10^n - 1\right) + 1 =$$

$$= \frac{4}{9}\times 10^{2n} - \frac{4}{9}\times 10^n + \frac{8}{9}\times 10^n - \frac{8}{9} + 1 = \frac{4}{9}\times 10^{2n} + \frac{4}{9}\times 10^n + \frac{1}{9} = \left(\frac{2\times 10^n + 1}{3}\right)^2$$

Pra çdo kufizë e vargut ka trajtën $\left(\frac{2\times 10^n + 1}{3}\right)^2$, i cili është katror i plotë i një numri natyror, pasi numri

$2\times 10^n + 1,\ n\in N$, është shumëfish i $3$ – it, rrjedhimisht $\frac{2\times 10^n + 1}{3} \in N$.

Pra treguam se çdo kufizë e trajtës $\underbrace{4444...}_{n}\underbrace{888}_{n-1}....9$ shkruhet si katror i plotë.

*Ushtrimit 4 Vlerësimi i plotë 10 pikë*

*Jepet funksioni zbritës* $y = f(x),\ x \in \left]0;+\infty\right[$ *. Gjeni bashkësinë e vlerave të* $a - s\ddot{e}$ *, për të cilat ka vend* $f\left(3a^2 + a + 8\right) < f\left(4a^2 - 5a + 1\right)$

.Zgjidhje e ushtrimit 4

Vëmë re se $3a^2 + a + 8 > 0,\ \forall a \in R\left(D < 0\right)$. Ndërsa

$$4a^2 - 5a + 1 > 0 \Leftrightarrow (a-1)(4a-1) > 0 \Leftrightarrow a < \frac{1}{4}\ ose\ a > 1 \qquad (1)$$

Meqenëse se funksioni ynë është zbritës në intervalin $\left]0;+\infty\right[$, kemi:

$$f\left(3a^2 + a + 8\right) < f\left(4a^2 - 5a + 1\right) \Leftrightarrow 3a^2 + a + 8 > 4a^2 - 5a + 1 \Leftrightarrow$$
$$a^2 - 6a - 7 < 0 \Leftrightarrow (a+1)(a-7) < 0 \Leftrightarrow -1 < a < 7 \qquad (2)$$

Nga përfundimet $(1)$ dhe $(2)$, marrim bashkësinë e kërkuar të vlerave të a-së:

$$a \in \left]-1;\frac{1}{4}\right[ \cup \left]1;7\right[$$

*Ushtrimit 5 Vlerësimi i plotë 10 pikë*

*Një nxënës do të luajë lojën ''Kapërce pengesën'' e cila realizohet sipas këti rregulli: Në pengesën e* $n - t\ddot{e}$*, nxënësi duhet të hedhë* $n - her\ddot{e}$ *një zar të rregullt kubik.*

*Nëse shuma e pikëve të rëna në këto* $n - hedhje$ *është më e madhe se* $2^n$*, konsiderohet se ky nxënës e ka kaluar këtë pengesë.*

*a) Maksimumi sa pengesa mund të kalojë ky nxënës gjatë një loje?*

*b) Sa është probabiliteti që ky nxënës të kalojë tri pengesat e para?*

Zgjidhje e ushtrimit 5a

Meqenëse zari është i rregullt, probabiliteti i rënies së çdo numri në secilën faqe $(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$është i njëjtë.

Meqenëse vlera më e madhe e pikëve në një hedhje të zarit është 6 dhe nga fakti se: $6 \times 4 > 2^4$ dhe $6 \times 5 < 2^5$, është e qartë se është e pamundur që shuma e pikëve të rëna në $n - hedhje$ kur $n \geq 5$, të jetë më e madhe se $2^n$, pra është ngjarje e pamundur dhe me probabilitet $0$. Kështu që maksimumi i pengesave që mund të kalojë ky nxënës në një lojë është $4$.

Zgjidhje e ushtrimit *5b*

Shënojmë me $Z_n$ ngjarjen: *''Në pengesën e $n-të$, nxënësi* **nuk** *e kalon pengesën*, rrjedhimisht ngjarja e kundërt është $\overline{Z_n}$ : *''Në pengesën e $n-të$, nxënësi e kalon pengesën''*.

Në pengesën e $n-të$ të kësaj loje, numri i gjithë rezultateve të mundshme të hedhjes së zarit është $6^n$. Le të shqyrtojmë rastet:

*Për pengesën e parë:* Për ngjarjen $Z_1$, janë 2-rezultate që e favorizojnë atë, në të cilat pikët e rëna janë 1 ose 2. Kështu, probabiliteti që nxënësi të kalojë pengesën e parë është:

$$P\left(\overline{Z_1}\right)=1-P\left(Z_1\right)=1-\frac{2}{6}=\frac{2}{3}$$

*Për pengesën e dytë:* Për ngjarjen $Z_2$, numri i rezultateve që favorizojnë këtë ngjarje është numri i gjithë zgjidhjeve të plota pozitive të ekuacionit $x+y=a$, ku a merr përkatësisht vlerat $2,\ 3\ ose\ 4$. Kështu që numri i rezultateve të mundshme që favorizojnë këtë ngjarje është: $C_1^1+C_2^1+C_3^1=1+2+3=6$, ndaj probabiliteti që nxënësi të kalojë pengesën e dytë është: $P\left(\overline{Z_2}\right)=1-P\left(Z_2\right)=1-\frac{6}{6^2}=\frac{5}{6}$.

*Për pengesën e tretë:* Për ngjarjen $Z_3$, numri i rezultateve të mundshme është numri i gjithë zgjidhjeve të plota pozitive të ekuacionit $x+y+z=a$, ku a merr përkatësisht vlerat $3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\ \text{ose}\ 8$. Kështu që numri i rezultateve të mundshme është:

$C_2^2+C_3^2+C_4^2+C_5^2+C_6^2+C_7^2=1+3+6+10+15+21=56$, ndaj probabiliteti që nxënësi të kalojë pengesën e tretë është: $P\left(\overline{Z_3}\right)=1-P\left(Z_3\right)=1-\frac{56}{6^3}=1-\frac{56}{216}=\frac{160}{216}=\frac{20}{27}$

Kështu kemi që probabiliteti i ngjarjes: ''Nxënësi kalon tri pengesat e para'' është:

$$P\left(\overline{Z_1}\right)\times P\left(\overline{Z_2}\right)\times P\left(\overline{Z_3}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}\times\frac{20}{27}=\frac{200}{486}=\frac{100}{243}.$$

*Shënim: Pranohet çdo zgjidhje tjetër e saktë, që nuk është parashikuar më lart, të cilin komisioni i vlerësimit e gjykon si të tillë.*