OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS

Klasa 11 | Faza e dytë | Viti shkollor 2023-2024

ZGJIDHJE

Ushtrimi 1 Vlerësimi i plotë 10 pikë

Provoni se, nëse $x,\ y,\ z$ *janë brinjë të një trekëndëshi, atëherë ka vend mosbarazimi.*

$$\frac{x}{3x-y+z}+\frac{y}{3z-z+x}+\frac{z}{3z-x+y}\geq 1$$

Zgjidhje e ushtrimit 1

$$\frac{x}{3x-y+z}+\frac{y}{3y-z+x}+\frac{z}{3z-x+y}\geq 1 \Leftrightarrow \frac{4x}{3x-y+z}+\frac{4y}{3y-z+x}+\frac{4z}{3z-x+y}\geq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4x}{3x-y+z}-1\right)+\left(\frac{4y}{3y-z+x}-1\right)+\left(\frac{4z}{3z-x+y}-1\right)\geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y-z}{3x-y+z}+\frac{y+z-x}{3y-z+x}+\frac{z+x-y}{3z-x+y}\geq 1$$

Në mosbarazimin e fundit, shumëzojmë lartë dhe poshtë secilën thyesë të anës së majtë me numëruesin përkatës dhe kemi:

$$\frac{(x+y-z)^2}{(3x-y+z)(x+y-z)}+\frac{(y+z-x)^2}{(3y-z+x)(y+z-x)}+\frac{(z+x-y)^2}{(3z-x+y)(z+x-y)}\geq 1$$

Jemi në kushtet e mosbarazimit *Cauchy,* ndaj kemi se:

$$\frac{(x+y-z)^2}{(3x-y+z)(x+y-z)}+\frac{(y+z-x)^2}{(3y-z+x)(y+z-x)}+\frac{(z+x-y)^2}{(3z-x+y)(z+x-y)}\geq$$

$$\geq \frac{\left[(x+y-z)+(y+z-x)+(z+x-y)\right]^2}{(3x-y+z)(x+y-z)+(3y-z+x)(y+z-x)+(3z-x+y)(z+x-y)}$$

Duke pasur parasysh se:

$$(3x-y+z)(x+y-z)=3x^2-y^2-z^2+2xy-2xz+2yz \qquad (1)$$
$$(3y-z+x)(y+z-x)=3y^2-x^2-z^2+2yz-2xy+2xz \qquad (2)$$
$$(3z-x+y)(z+x-y)=3z^2-x^2-y^2+2xz-2yz+2xy \qquad (3)$$

Ndaj shuma e tri mbledhorëve në emërues, pas thjeshtimeve përkatëse del

$$(1)+(2)+(3)=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=(x+y+z)^2$$

Pra:

$$\frac{\left[(x+y-z)+(y+z-x)+(z+x-y)\right]^2}{(3x-y+z)(x+y-z)+(3y-z+x)(y+z-x)+(3z-x+y)(z+x-y)}=\frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2}=1\ge 1$$

Ushtrimi 2 Vlerësimi i plotë 10 pikë

Jepet ekuacioni $x^2+kx+c=0,\ c\neq 0$. *Nëse dihet se rrënjët reale të tij janë* x_1 *dhe* x_2, *gjeni në varësi të* $c-s\ddot{e}$ *gjithë vlerat e mundshme të parametrit* k, *për të cilat ka vend mosbarazimi:* $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3\le 52$

Zgjidhje e ushtrimit 2

Dallojmë rastet:

Rasti 1: $c<0$, $(D>0)$

Në këtë rast, rrënjët reale të ekuacionit tonë janë të ndryshme dhe me shenjë të kundërt, pasi $P=x_1\times x_2=\frac{c}{a}=c$. Kjo do të thotë se mosbarazimi $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3\le 52$, plotësohet për çdo vlerë reale të $k-s\ddot{e}$.

Rasti 2: $c>0$:

Për këtë rast kemi:

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3=\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\right)^3-3\frac{x_1}{x_2}\times\frac{x_2}{x_1}\times\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\right)=$$

$$=\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\right)\left[\left(\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\right)^2-3\frac{x_1}{x_2}\times\frac{x_2}{x_1}\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\right)\left[\left(\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\right)^2-3\right)\right] \qquad (1)$$

Nga ana tjetër kemi: $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{k^2}{c}-2$

Nga barazimi (1) kemi: $\left(\frac{k^2}{c}-2\right)\left[\left(\frac{k^2}{c}-2\right)^2-3\right]\le 52$.

Le të zëvendësojmë $\frac{k^2}{c}=m$, atëherë kemi:

$$(m-2)\left[(m-2)^2-3\right]\le 52 \Leftrightarrow (m-2)\left(m^2-4m+1\right)\le 52 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m^3-6m^2+9m-54\le 0 \Leftrightarrow (m-6)\left(m^2+9\right)\le 0$$

Meqenëse $m^2+9>0 \Rightarrow m-6\le 0$.

Kështu që: $\frac{k^2}{c}-6\le 0 \Leftrightarrow k^2\le 6c \Leftrightarrow -\sqrt{6c}\le k\le\sqrt{6c}$.

Si përfundim themi se:

Mosbarazimi është i vërtetë për çdo vlerë reale të $k-së$ kur $c<0$.

Për $c>0$, mosbarazimi është i vërtetë për $k\in\left[-\sqrt{6c};\ \sqrt{6c}\right]$.

Ushtrimi 3 Vlerësimi i plotë 10 pikë

Në një popullatë prej n *– bakteresh bie një virus. Brenda një minute ky virus asgjëson një bakter dhe pastaj ndahet në dy viruse të reja. Ndërkohë secila nga bakteret e mbetura ndahet gjithashtu në dy baktere reja. Ky proces vazhdon kështu edhe në minutat pasardhëse. A do të ekzistojë pafundësisht kjo popullatë bakteresh?*

Argumentoni nëse koha e ekzistencës së popullatës së baktereve është e fundme ose jo.

Zgjidhje e ushtrimit 3

Sipas përshkrimit të procesit, pas minutës së parë numri i viruseve është 2, ndërsa ai i baktereve është $2(n-1)$.

Vargu i numrit të viruseve pas çdo minute, duke filluar nga minuta e parë, është një varg gjeometrik, me kufizë të parë 1 dhe herës 2.

Kështu që:

Pas minutës së $(k-1)$-të numri i viruseve do të jetë $V_{k-1}=2^{k-1}$, ndërsa numri i baktereve do të jetë $B_{k-1}=2^{k-1}(n-k+1)$.

Pas minutës së k-të numri i baktereve do të jetë $B_k=2\left[2^{k-1}(n-k+1)-2^{k-1}\right]$.

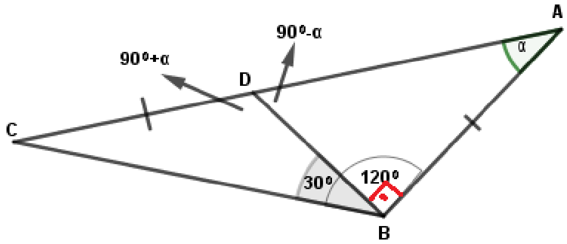
Thjeshtojmë shprehjen dhe kemi: $B_k=2^k(n-k+1)-2^k \Rightarrow B_k=2^k(n-k)$

Kështu që $B_k=0 \Leftrightarrow 2^k(n-k) \Leftrightarrow (n-k)=0 \Leftrightarrow n=k$. Kjo do të thotë se popullata e baktereve do të asgjësohet plotësisht pas aq minutash sa është dhe numri i tyre. Pra pas $n-minutash$ numri i baktereve është i barabartë me zero.

Ushtrimi 4 Vlerësimi i plotë 10 pikë

Jepet trekëndëshi ΔABC*, i tillë që* $m\left(A\hat{B}C\right)=120^0$*. Në brinjën përballë kulmit* B*, merret pika* D*, e tillë që* $m\left(A\hat{B}D\right)=90^0$*. Gjeni gjatësinë e segmentit* AD*, nëse* $AB=DC=1\ cm$*.*

Zgjidhje e ushtrimit 4



Nga të dhënat kemi se $m\left(A\hat{B}D\right)=90^0$ nga ku $m\left(C\hat{B}D\right)=30^0$.

Le të shënojmë $m\left(B\hat{A}D\right)=\alpha$ dhe $AD=x\ cm$.

Kuptohet se: $m\left(A\hat{D}B\right)=90^0-\alpha \Rightarrow m\left(B\hat{D}C\right)=90^0+\alpha$

Meqenëse ΔABD është kënddrejtë, kemi:

$$\cos\alpha=\frac{AB}{AD}=\frac{1}{x} \qquad (1)$$

Zbatojmë Teoremën e Sinusit në ΔBDC:

$$\frac{BC}{\sin\left(90^0+\alpha\right)}=\frac{CD}{\sin 30^0}$$, ku $\sin\left(90^0+\alpha\right)=\cos\alpha$.

Kështu që duke pasur parasysh barazimin (1), kemi:

$$\frac{BC}{\cos\alpha}=\frac{CD}{\sin 30^0}\Leftrightarrow \frac{BC}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{0,5}\Leftrightarrow BC=\frac{2}{x} \qquad (2)$$

Zbatojmë Teoremën e Kosinusit në trekëndëshin e dhënë ΔABC:

$AC^2=AB^2+BC^2-2\times AB\times BC\times\cos\left(120^0\right)$, pra:

$$(x+1)^2=1^2+\left(\frac{2}{x}\right)^2-2\times1\times\frac{2}{x}\times(-0,5)\Leftrightarrow (x+1)^2=1+\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x}.$$

Duke kryer shndërrimet e mëtejshme, ekuacioni i fundit shndërrohet në trajtën:

$x^4+2x^3-2x-4=0$, nga ku $\left(x^3-2\right)\left(x+2\right)=0$. Kështu që $x=AD=\sqrt[3]{2}\ cm$

Ushtrimi 5 Vlerësimi i plotë 10 pikë

Gjeni tre numra të plotë pozitivë, të ndryshëm nga njëri-tjetri, me shumën më të vogël të mundshme, të tillë që shuma e të anasjelltëve të çdo dy prej tyre të jetë sa shumëfishi i të anasjelltit të numrit të tretë.

Zgjidhje e ushtrimit 5:

Le të jenë $x,\ y\ dhe\ z \in N$, të cilët përmbushin kushtet e problemës. Supozojmë se $x < y < z$.

Kemi tri barazimet e vërteta: $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{a}{x};\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{b}{y};\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{c}{z}$, ku $a,\ b,\ c \in N$.

Ka vend barazimi: $k=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{a+1}{x}=\frac{b+1}{y}=\frac{c+1}{z}$.

Meqenëse $x < y < z$, atëherë $a < b < c$, kështu që:

$k=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{k}{a+1}+\frac{k}{b+1}+\frac{k}{c+1}$ ose $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=1$. Duke pasur parasysh se $a < b < c$,

është e qartë se: $1=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}<\frac{3}{a+1}$ $\qquad (1)$

Kështu që $a<2 \Rightarrow a=1$. Duke zëvendësuar tek barazimi (1), kemi:

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1} \Leftrightarrow \frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=\frac{1}{2}$$

Meqenëse $b<c$, atëherë $\frac{2}{b+1}>\frac{1}{2} \Leftrightarrow b+1<4 \Leftrightarrow b<3$. Meqenëse $a<b$, atëherë b=2.

Nga barazimi i fundit kemi se: $\frac{1}{c+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6} \Leftrightarrow c=5$.

Si përfundim treshja e numrave natyrorë, $x<y<z$, janë të tillë që përmbushin përpjesëtueshmërinë:

$$x:y:z \equiv (a+1):(b+1):(c+1) \equiv 2:3:6$$

Meqenëse kjo treshe na kërkohet me shumën më të vogël të mundshme, atëherë vlerat e kërkuara për x, y, z, janë përkatësisht: $x=2, y=3\ dhe\ z=6$.

Shënim: Pranohet çdo zgjidhje tjetër e saktë, që nuk është parashikuar më lart, të cilin komisioni i vlerësimit e gjykon si të tillë.