REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
DHE SPORTIT
QENDRA E SHËRBIMEVE ARSIMORE
DREJTORIA E VLERËSIMIT

# OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS

Klasa 10 Faza e dytë Viti shkollor 2023-2024

## ZGJIDHJE

Ushtrimi 1 Vlerësimi i plotë 10 pikë

*Dihet se* $y^x = 3,\ y^z = 27\ dhe\ \ z^x = 4$. *Gjeni* $z^z$.

Zgjidhje e ushtrimit 1:

Ngremë në kub të dy anët e barazimit të parë: $y^x = 3 \Leftrightarrow \left(y^x\right)^3 = 3^3 \Leftrightarrow y^{3x} = 27$

Nga barazimi i dytë kemi se $y^z = 27$, nga ku $y^z = y^{3x} \Leftrightarrow z = 3x$ prej nga njehsojmë

$z^z = z^{3x} \Leftrightarrow z^z = \left(z^x\right)^3 \Leftrightarrow z^z = (4)^3 \Leftrightarrow z^z = 64$.

Ushtrimi 2 Vlerësimi i plotë 10 pikë

*Provoni se ka vend mosbarazimi* $\frac{x}{2x+3y+3z}+\frac{y}{2y+3x+3z}+\frac{z}{2z+3y+3x}\geq\frac{3}{8}$*, ku* $x,\ y,\ z$ *janë numra realë, pozitivë.*

Zgjidhje e ushtrimit 2

Shënojmë $S=3x+3y+3z$

Do provojmë se: $\frac{x}{2x+3y+3z}+\frac{y}{2y+3x+3z}+\frac{z}{2z+3y+3x}\geq\frac{3}{8}$ ose $\frac{x}{S-x}+\frac{y}{S-y}+\frac{z}{S-z}\geq\frac{3}{8}$ ose

$\frac{x}{S-x}+1+\frac{y}{S-y}+1+\frac{z}{S-z}+1\geq\frac{3}{8}+3\Leftrightarrow\frac{S}{S-x}+\frac{S}{S-y}+\frac{S}{S-z}\geq\frac{27}{8}$, nga ku:

$\underbrace{S\left(\frac{1^2}{S-x}+\frac{1^2}{S-y}+\frac{1^2}{S-z}\right)\geq S\left(\frac{(1+1+1)^2}{S-x+S-y+S-z}\right)}_{Cauchy}=\frac{9S}{3S-\frac{S}{3}}=\frac{27}{8}$, çka donim të provonim.

Ushtrimi 3 Vlerësimi i plotë 10 pikë

*Në rrjetin koordinativ jepen pikat* $A\left(0;\frac{4}{3}\right),\ B(-1;0)\ dhe\ C(1;0)$*. Një pikë e katërt* $D(x;y)$*, është e tillë që largesa e saj nga drejtëza* $BC$ *është sa mesatarja gjeometrike e largesave të pikës* $D$ *nga dy drejtëzat e tjera* $AB\ dhe\ AC$*. Provoni se pika* $D(x;y)$ *ndodhet në dy vija të gradës së dytë, ku njëra prej tyre është rreth.*

*Gjeni qendrën dhe rrezen e këtij rrethi.*

Zgjidhje e ushtrimit 3:

Gjejmë ekuacionet e drejtëzave $BC, AB\ dhe\ AC$, të cilat janë përkatësisht:

$BC: y=0$, $AB: 4x-3y+4=0$, $AC: 4x+3y-4=0$. Shënojmë $l_1,\ l_2\ dhe\ l_3$, largesat e pikës D përkatësisht nga drejtëzat e dhëna $BC, AB\ dhe\ AC$. Kështu që kemi:

$l_1=|y|$,

$l_2=\frac{1}{5}|4x-3y+4|$

$l_3=\frac{1}{5}|4x+3y-4|$

Duke ditur nga kushti se $l_1^2 = l_2 \times l_3 \Rightarrow 25y^2 = \left|16x^2 - (3y-4)^2\right|$, nga ku përftojmë ekuacionet:

$16x^2 - (3y-4)^2 + 25y^2 = 0 \ ose \ 16x^2 - (3y-4)^2 - 25y^2 = 0$, nga të cilat duke shndërruar kemi:

$(1) \quad 16x^2 + 16y^2 + 24y - 16 = 0 \ ose$

$(2) \quad 16x^2 - 16y^2 + 24y - 16 = 0$

Vija me ekuacionin $(1)$ është rrethi, trajta e thjeshtuar e të cilit është: $x^2 + \left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{4}$

Kështu që pika $D$ ndodhet në rrethin me qendër $\left(0; -\frac{3}{4}\right)$ dhe rreze $R = \frac{5}{2} \ njesi$

- Pika $D$ ndodhet gjithashtu edhe në vijën e dytë me ekuacion $(2) \quad 16x^2 - 16y^2 + 24y - 16 = 0$ është hiperbolë.

Ushtrimi 4 Vlerësimi i plotë 10 pikë

*Tri numra realë të ndryshëm nga zero,* $m, \ n, \ p$ *, thuhet se janë progresion harmonik, nëse ka vend barazimi* $\frac{1}{m} + \frac{1}{p} = \frac{2}{n}$*. Gjeni të gjitha treshet e numrave harmonike* $(m; \ n; \ p)$*, të cilat plotësojnë kushtet:*

$m < n < p$, $m = 20$ *dhe* $n$ *është pjesëtues i* $p$ *.*

Zgjidhje e ushtrimit 4

Meqë treshja $20, \ n, \ p$ është progresion harmonik, atëherë kemi se: $\frac{1}{20} + \frac{1}{p} = \frac{2}{n}$, nga ku:

$$\frac{20+p}{20p} = \frac{2}{n} \Leftrightarrow np + 20n - 40p = 0 \qquad (1)$$

Barazimin $(1)$ e transformojmë në trajtën $np + 20n - 40p = 0 \ \Leftrightarrow (40-n)(p+20) = 800$.

Nga barazimi i fundit dhe kushtet e problemës kemi: $20 < n < 40 \Leftrightarrow 0 < 40 - n < 20$

Nën këto kushte, shprehim numrin 800 si prodhim dy faktorësh natyrorë, ku njëri është më i vogël se 20.

Kemi:

$$(40-n)(p+20) = 800 = 1 \times 800 = 2 \times 400 = 4 \times 200 =$$
$$= 5 \times 160 = 8 \times 100 = 10 \times 80 = 16 \times 50$$

Kështu kemi *7-treshet*:

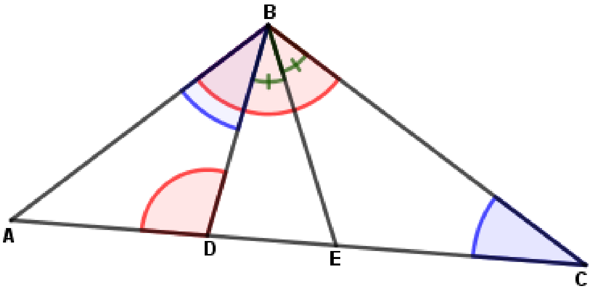
$(20; 39; 780), (20; 38; 380), (20; 36; 180), (20; 35; 140), (20; 32; 80), (20; 30; 60), (20; 24; 30)$, nga të cilat vetëm tek $5-$prej tyre, termi i dytë $n$ është pjesëtues i $p$ :

$(20; 39; 780), (20; 38; 380), (20; 36; 180), (20; 35; 140), (20; 30; 60)$.

Ushtrimi 5 Vlerësimi i plotë 10 pikë

*Në brinjën $AC$ të një trekëndëshi $\Delta ABC$, pikat $D$ dhe $E$ janë të tilla që $AB = AE$ dhe $AE^2 = AD \times AC$. Provoni se segmenti $BE$ është përgjysmore e këndit $D\hat{B}C$.*

Zgjidhje e ushtrimit 5




Meqenëse $AB = AE$, atëherë barazimi i dhënë $AE^2 = AD \times AC$, mund të shkruhet:

$AB^2 = AD \times AC$, ose si përpjesëtueshmëri: $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AB}{AC}$.

Është e qartë se $\Delta ABD \sim \Delta ABC$ ( Rasti i II-të i ngjashmërisë), prej nga del se:

$$m\left(B\hat{D}A\right) = m\left(A\hat{B}C\right) \text{ dhe } m\left(A\hat{B}D\right) = m\left(B\hat{C}A\right)$$

Meqenëse këndi $B\hat{D}A$, është kënd i jashtëm i $\Delta DBC$, kemi: $m\left(B\hat{D}A\right) = m\left(C\hat{B}D\right) + m\left(D\hat{C}B\right)$

Por $m\left(B\hat{D}A\right) = m\left(A\hat{B}C\right)$, nga ku kemi: $m\left(B\hat{D}A\right) = m\left(C\hat{B}E\right) + m\left(D\hat{B}E\right) + m\left(A\hat{B}D\right)$ (1)

Nga ana tjetër , meqenëse $AB = AE$, në $\Delta ABE$, kemi:

$$m\left(A\hat{E}B\right) = m\left(D\hat{B}E\right) + m\left(A\hat{B}D\right) \qquad (2)$$

Duke pasur parasysh se këndi $B\hat{D}A$ është kënd i jashtëm për $\Delta DBE$, kemi:

$$m\left(B\hat{D}A\right) = m\left(A\hat{E}B\right) + m\left(D\hat{B}E\right) \qquad (3)$$

Duke kombinuar barazimet $(1)$ dhe $(3)$, kemi:

$m\left(C\hat{B}E\right) + m\left(D\hat{B}E\right) + m\left(A\hat{B}D\right) = m\left(A\hat{E}B\right) + m\left(D\hat{B}E\right)$, nga ku:

$$m\left(C\hat{B}E\right) + m\left(A\hat{B}D\right) = m\left(A\hat{E}B\right) \qquad (4)$$

Duke kombinuar barazimet $(2)$ dhe $(4)$, kemi:

$m\left(D\hat{B}E\right) + m\left(A\hat{B}D\right) = m\left(C\hat{B}E\right) + m\left(A\hat{B}D\right)$, nga ku:

$m\left(D\hat{B}E\right) = m\left(C\hat{B}E\right)$, pra $BE$ është përgjysmore e këndit $D\hat{B}C$

*Shënim: Pranohet çdo zgjidhje tjetër e saktë, që nuk është parashikuar më lart, të cilin komisioni i vlerësimit e gjykon si të tillë.*