REPUBLIKA E SHQIPËRISË

MINISTRIA E ARSIMIT
SPORTIT DHE RINISË

QENDRA E SHËRBIMEVE ARSIMORE

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS - KLASA E 9-TË

Viti mësimor 2019-2020 Faza e tretë 7 mars 2020

ZGJIDHJE

1.

Zgjidhje :

ABCD është romb dhe $M, P \in (AC) \Rightarrow \Delta MBP \cong \Delta MDP \Rightarrow \widehat{MBP} = \widehat{MDP}$ dhe $\widehat{BMP} = \widehat{DMP}$.

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{MBP} = \widehat{MDP} \\ MN = MD \ \Rightarrow \widehat{MDN} = \widehat{MND} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{MBP} = \widehat{MNP} \Rightarrow MBNP$$

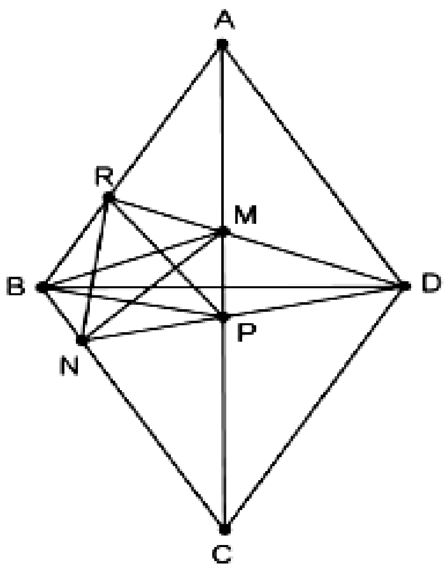
është ciklik. Nga kjo marrim që:

$\widehat{CNP} = \widehat{BMP} = \widehat{DMP} = \widehat{CNP} = \widehat{DMP} \Rightarrow$ MNCD është ciklik$\Rightarrow \widehat{MDN} = \widehat{MCN} = \widehat{MAB}$.

$\widehat{MDN} = \widehat{MAB} \Rightarrow$ ADPR është ciklik $\Rightarrow \widehat{PRD} = \widehat{PAD} = \widehat{PAR} = \widehat{PDR}$.

$\widehat{PRD} = \widehat{PDR} \Rightarrow \Delta$ PDR është dybrinjëshëm

$\Rightarrow PR = PD$



2. Zgjidhje:

$ab + bc + cd + da = b(a + c) + d(a + c) = (a + c)(b + d) = (a + c)[1 - (a + c)]$. Shënojmë $(a + c) = t$.

Në qoftë se $t \leq 0 \Rightarrow (a + c)[1 - (a + c)] \leq 0 < \frac{1}{4}$

Në qoftë se $0 < t < 1 \Rightarrow (1 - t) > 0 \Rightarrow \sqrt{t(1 - t)} \leq \frac{t+(1-t)}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow t(1 - t) \leq \frac{1}{4}$

Nga AM-GM. Barazimi arrihet kur $t = 1 - t = \frac{1}{2}$

Në qoftë se $t \geq 1 \Rightarrow t(1 - t) \leq 0 < \frac{1}{4}$

Pra, provuam që $t(1 - t) = (a + c)[1 - (a + c)] = ab + bc + cd + da \leq \frac{1}{4}$

Barazimi arrihet kur $a + c = b + d = \frac{1}{2}$

3.

Zgjidhje :

$$\frac{x+3}{2} = \frac{x+3+1-1}{2} = \frac{x-1+4}{2} = \frac{x-1}{2} + 2$$

$$\frac{x+5}{3} = \frac{x+5+1-1}{3} = \frac{x-1+6}{3} = \frac{x-1}{3} + 2$$

…………………………………………………..

$$\frac{x+(2n+1)}{(n+1)} = \frac{x+2n+1+1-1}{(n+1)} = \frac{x-1+2(n+1)}{(n+1)} = \frac{x-1}{(n+1)} + 2$$

$$\frac{x+3}{2} + \frac{x+5}{3} + \frac{x+7}{4} + \dots . + \frac{x+(2n+1)}{(n+1)} = n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{2} + 2 + \frac{x-1}{3} + 2 + \dots + \frac{x-1}{(n+1)} + 2 = 2n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots . + \frac{1}{n+1}\right) + 2n = 2n$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots . + \frac{1}{n+1}\right) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

4.

Zgjidhje :
$\boldsymbol{a} = 6^n + 2^{n+2} = 2^n(3^n + 4)$,të cilët janë të thjeshtë ndërmjet tyre.
Që $\boldsymbol{a}$ të jetë katror i plotë duhet që 2^n dhe $(3^n + 4)$ të jenë katror të plotë.
Që 2^n të jetë katror i plotë duhet që $n = 2k$, $k \in N$
Për $n = 2k$, $k \in N$, marrim që :

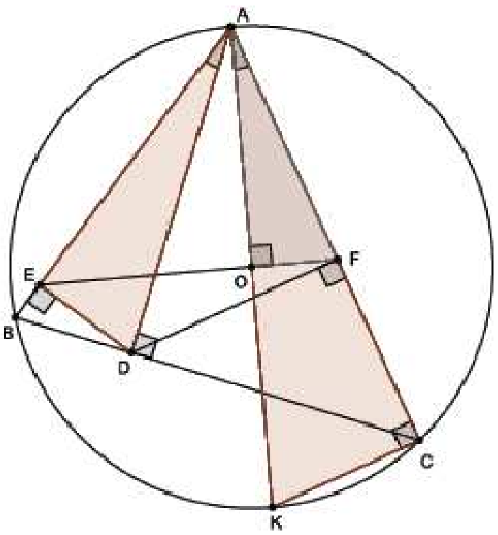
$$3^n + 4 = 3^{2k} + 4 = 9^k + 4 = (8 + 1)^k + 4 = A_8 + 5$$

Pra, $\boldsymbol{a} = A_8 + 5$ një numër i kësaj forme nuk mund të jetë katror i plotë sepse çdo katror i plotë gjatë pjestimit me 8 nuk jep mbetje 5.

5.

Zgjidhje : Katërkëndëshi $AEDF$ është ciklik, nga ku marrim që $\widehat{DFE} = \widehat{DAE}$.

Nga fakti që drejtëzat AD dhe AO janë izogonale (sepse këndet $\widehat{ABC} = \widehat{AKC}, dhe\ \Delta ADB, \Delta ACK$ kënddrejtë) kemi që $AO \perp FE$.



Shënojmë me $\{O_1\} = AO \cap EF$.
Marrim që $\Delta AFO_1 i$ ngjashëm me ΔADB, nga ku marrim $\frac{AF}{AB} = \frac{AO_1}{AD}$.
Pika K është pika e rrethit dhe e diametrit të hequr nga A.
ΔACK≈ ΔAED , nga ku marrim që

$$\frac{AK}{AD} = \frac{AC}{AE} = \sqrt{2}$$

ΔAEF≈ΔACB, nga ku marrim që:

$$\sqrt{2} = \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AF} = \frac{AD}{AO_1} = \frac{R\sqrt{2}}{AO_1} \Rightarrow AO_1 = R.$$

Pra, $O_1 \equiv O$.

6.

Zgjidhje :

$$S = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ac)$$

$= 2 - 2(ab + bc + ac)$ (*)
Nga fakti që $(a + b + c)^2 \geq 0$ marrim që:
$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \geq 0 \Rightarrow 1 + 2(ab + bc + ca) \geq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -2(ab + bc + ca) \leq 1$ (**)
Duke zëvendësuar (**) tek (*) marrim: $S = 2 - 2(ab + bc + ac) \leq 2 + 1 = 3$