REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
SPORTIT DHE RINISË
QENDRA E SHËRBIMEVE ARSIMORE

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS – SHKOLLA E MESME

Viti mësimor 2019-2020 | Faza e tretë | 7 mars 2020

ZGJIDHJE

1.

Zgjidhje :

Le të jetë $2^n + n^2$një numër prim, ku $n \geq 2,\ n \in N$.
Që të provojmë që $n-3$ plotpjestohet me 6 duhet të provojmë që plotpjestohet nga 2 dhe 3.
Në qoftë se n −çift kemi që $2^n + n^2$do të jetë çift, që bie në kundërshtim me kushtin që $2^n + n^2$ është numër prim, prandaj n është tek.
Për n - tek , $n-3$ është çift, nga marrim që $n-3$ plotpjestohet me 2.
$2^n + n^2 = 2^n + 1 - 1 + n^2 = (2^n + 1) + (n^2 - 1) =$
$= (2+1)(2^{n-1} - 2^{n-2} + 2^{n-3}. \dots + 1) + (n-1)(n+1)$.
$(n-1)(n+1)$nuk plotpjestohet me 3 se $2^n + n^2$ është prim, $n \geq 2$
Dhe meqë $(n-1)n(n+1)$plotpjestohet me 3 si tre numra të njëpasnjëshëm,
Del që n plotpjestohet me 3, nga ku del që $n-3$ plotpjestohet me 3.
Pra, u provua që $n-3$ plotpjestohet me 6.

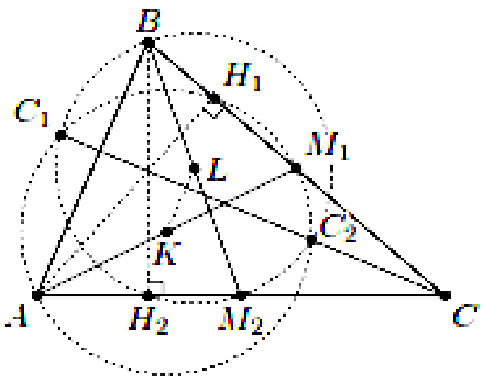
2.

Zgjidhje:
Shënojmë: $\boldsymbol{x} = b + c - a$; $\mathbf{y} = c + a - b$; $\boldsymbol{z} = a + b - c$
$(x, y, z > 0)$ nga fakti që ***a, b, c*** janë brinjë të një trekëndëshi
$\Rightarrow\ a = \frac{y+z}{2}$, $b = \frac{x+z}{2}$, $c = \frac{x+y}{2}$. Duke bërë zëvendësimet
Mosbarazimi që duam të provojmë shkruhet:
$\frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right) \geq 3$
Nga AM-GM kemi : $\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \geq 6\sqrt[6]{\frac{y}{x} \cdot \frac{z}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{z}{y} \cdot \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{z}} = 6$
Pra, mosbarazimi është i vërtetë sepse:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z}\right) \geq \frac{1}{2} \cdot 6 \sqrt[6]{\frac{y}{x} \cdot \frac{z}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{z}{y} \cdot \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{z}} = 3$$

3.

Zgjidhje :
Meqë H_1 ndodhet në rrethin me diametër AM_1 kemi që$\widehat{AH_1M_1}$=90° dhe H_2 ndodhet në rrethin me diametër BM_2 kemi që $\widehat{BH_2M_2}$=90°. Pra, AH_1 , BH_2 janë lartësi të ΔABC. $\Delta ABC \cong \Delta CH_1H_2$ sepse: meqë $\widehat{AH_1B} = \widehat{AH_2B} = 90°$ kemi që katërkëndëshi ABH_1H_2 është ciklik (i jashtëshkruhet rrethi me diametër AB).
$\widehat{ABH_1}+\widehat{AH_2H_1} = 180° \Rightarrow \widehat{ABH_1} = 180 - \widehat{AH_2H_1} = \widehat{CH_2H_1}$. Pra, $\widehat{ABH_1} = \widehat{ABC} = \widehat{CH_2H_1}$,gjithashtu $\widehat{ACB} = \widehat{H_2CH_1}$ nga ku del që:
$\Delta ABC \cong \Delta CH_1H_2$. Nga ngjashmëria marrim:
$\frac{CH_1}{CH_2} = \frac{AC}{BC} = \frac{\frac{1}{2}AC}{\frac{1}{2}BC} = \frac{CM_2}{CM_1} \Rightarrow CH_1 \cdot CM_1 = CH_2 \cdot CM_2$. Nga këtu marrim që katërkëndëshi $H_1M_1H_2M_2$
është ciklik. Nga teorema e boshteve radikaleve ,në qoftë se shënojmë : ω_1-rrethi me diametër AM_1 ,
ω_2-rrethi me diametër BM_2 , ω_3-rrethi që kalon nga pikat H_1 , M_1 , H_2 , M_2 , atëhere boshtet radikale të rrathëve (ω_1, ω_2) që është C_1C_2, (ω_2, ω_3) që është H_2M_2, (ω_1, ω_3) që është H_1M_1, priten në një pikë të vetme që është C. Pra, C , C_1 , C_2 ndodhen në një drejtëz. Meqë C_1C_2 është kordë e përbashkët e dy rrathëve ω_1, ω_2, është pingul me drejtëzën që bashkon qendrat e rrathëvë, d.m.th., me segmentin KL që lidh meset e mesoreve AM_1 dhe BM_2. Provojmë që $KL||A$B. Nga kjo marrim që $C_1C_2 \perp AB$, $\Rightarrow CC_1$ përmban lartësinë e trekëndëshit,nga teorema për lartësitë e Δ që priten në një pikë, provuam që
AH_1 , BH_2, CC_1 priten në një pikë.
Meqë KM_2 –vijë e mesme e $\Delta ACM \Rightarrow KM_2 \parallel CM_1$, $KM_2 = \frac{CM_1}{2} = \frac{BC}{4}$.
Meqë LM_1 –vijë e mesme e $\Delta BCM_2 \Rightarrow LM_1 \parallel CM_2$,
$LM_1 = \frac{CM_2}{2} = \frac{AC}{4}$.
$M_2K \cap AB = F_1$, $M_1L \cap AB = F_2$. $M_2F_1 \parallel BC$, $M_2 -$ mesi i $AC \Rightarrow F_1$-mesi i AB.
$M_1F_2 \parallel AC$, $M_1 -$ mesi i $BC \Rightarrow F_2$-mesi i $AB \Rightarrow F_1$, $F_2 -$ përputhen në një pike që
e shënojmë me F në ΔM_1M_2F : $FK = KM_2$,$FL = LM_1$ nga ku $\Rightarrow KL$ vijë e
mesme e $\Delta M_1M_2F \Rightarrow KL \parallel M_1M_2 \parallel AB$.



4.

Zgjidhje:
Për $x = 0$ kemi që $f(x) = 0$ sepse:
$[0] = 0$ dhe $\{0\} = 0$ marrim $3f(0) = 0$
Për $x = k$, $k \in Z$ kemi $[k] = k$, $\{k\} = 0$ nga ku:
$$f(k) + f([k]) + f(\{k\}) = 2k$$
$f(k) + f(k) + f(0) = 2k \Rightarrow 2f(k) = 2k \Rightarrow f(k) = k$
Për $x \in [0,1[\Rightarrow [x] = 0$, $\{x\} = x$
nga $f(x) + f([x]) + f(\{x\}) = 2x$ për të cilat marrim që:
$f(x) + f(0) + f(x) = 2x \Rightarrow 2f(x) = 2x \Rightarrow f(x) = x$
Për $\forall x \in R$,nga fakti që : $x = [x] + \{x\}$, ku $[x] \in Z$ dhe $\{x\} \in [0,1[$
marrim: $f([x]) = x$ sepse $[x] \in Z$ dhe $f(\{x\}) = \{x\}$ sepse $\{x\} \in [0,1[$
Pra, barazimi $f(x) + f([x]) + f(\{x\}) = 2x \Leftrightarrow f(x) + [x] + \{x\} = 2x \Leftrightarrow$
$f(x) + x = 2x \Leftrightarrow f(x) = x$, $\forall x \in R$

5.

Zgjidhje :
Shënojmë me **x**-numrin e vajzave. Numri i djemve do të jetë **3x**

Ndërmjet njëra tjetrës vajzat zhvilluan $\frac{x(x-1)}{2}$ ndeshje .

Ndërmjet njëri tjetrit djemtë zhvilluan $\frac{3x(3x-1)}{2}$ ndeshje

Djemtë zhvilluan ndërmjet tyre më shumë ndeshje se vajzat :
$$\frac{3x(3x-1)}{2} - \frac{x(x-1)}{2} = \frac{9x^2 - 3x - x^2 + x}{2} = \frac{8x^2 - 2x}{2} = 4x^2 - x$$
Gjithësej u zhvilluan $\frac{4x(4x-1)}{2}$ ndeshje se 4x-ishte numri i pjesmarrësve.

Ndeshje ndërmjet djemve dhe vajzave u zhvilluan :
$$\frac{4x(4x-1)}{2} - \frac{x(x-1)}{2} - \frac{3x(3x-1)}{2} = \frac{6x^2}{2} = 3x^2$$
Meqë në fund djemtë shënuan numër të njejtë pikësh me vajzat atëhere kemi që $3x^2 \geq 4x^2 - x$, gjithashtu kemi $x(x-1) \geq 0$ nga të cilat marrim që $x = 1$. Pra, në turne morën pjesë 1 vajzë dhe 3 djem.
Një vajzë zhvilloi 3 ndeshje dhe fitoi vendin e parë.