AMBASCIATA D'ITALIA A TIRANA

UFFICIO SCOLASTICO

Modello di esame di stato per le Sezioni Bilingui Italo-Albanesi di Tirana, Korca e Scutari.

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA

Istruzioni:

- Sono proposti dieci quesiti.
- Il candidato/la candidata deve svolgere tutti i quesiti.
- Ogni quesito vale 5 punti per un totale di 50 punti.
- La durata massima della prova è 2 ore e 30 minuti.
- E' consentito soltanto l'uso di calcolatrici scientifiche non programmabili

1. Risolvere il seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} 2x^2 - 7x + 5 > 0 \\ \frac{-2x^2+6}{x^2-5x+6} \le 0 \end{cases}$$

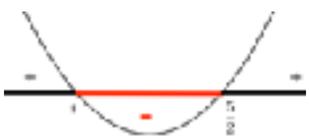
SOLUZIONE:

Risolviamo la prima disequazione

$2x^2 - 7x + 5 > 0$

troviamo le soluzioni dell'equazione corrispondente : $x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{4} = \frac{7 \pm 3}{4}$;

$x_1 = 1 \vee x_2 = \frac{5}{2}$;

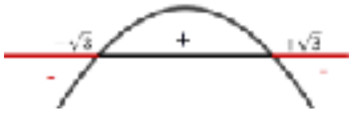


$x < 1 \vee x > \frac{5}{2}$

risolviamo la seconda disequazione, studiando dapprima il segno del numeratore e quello del denominatore

N>0 $\quad -2x^2+6>0$

l'equazione corrispondente è $-2x^2+6=0 \ \Leftrightarrow -2x^2=-6 \ \Leftrightarrow x^2=3 \ \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$



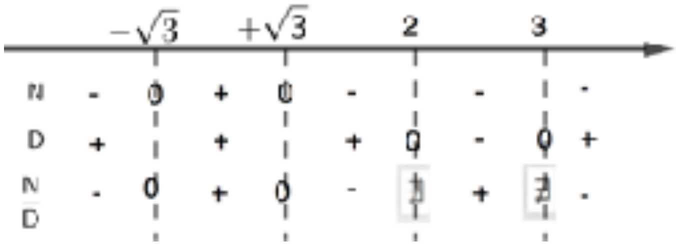
$-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$

D>0 $\quad x^2-5x+6>0$

l'equazione corrispondente $x^2-5x+6=0 \ \Leftrightarrow (x-3)(x-2)=0$ ha soluzioni $x=2 \vee x=3$

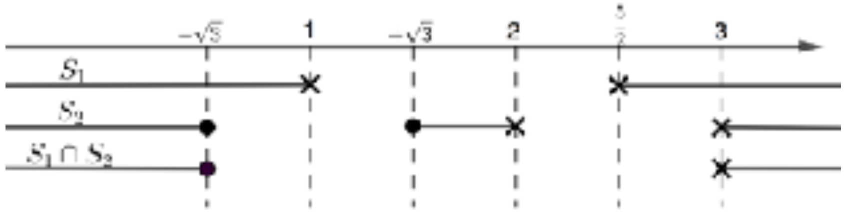
$x<2 \vee x>3$

Procediamo con lo schema dei segni



Dunque le soluzioni della seconda disequazione sono $x \le -\sqrt{3} \ \vee \sqrt{3} \le x < 2 \ \vee x > 3$.

Procedendo con lo schema del sistema



Il sistema ha quindi come insieme delle soluzioni $S =]-\infty; -\sqrt{3}] \ \cup]3; +\infty[$.

2. **Scrivere l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, che passa per A(4;10) e ha vertice in V(1;-8). Determinare inoltre le coordinate dei punti in cui la parabola incontra gli assi coordinati.**

SOLUZIONE

L'equazione di una parabola con asse verticale si può scrivere, in funzione delle coordinate del vertice:

$$y=a(x-x_V)^2+y_v \qquad *$$

sostituendo ad x e y le coordinate di A e ad x_V e y_V quelle del vertice si ottiene a

$$10=a(4-1)^2-8 \ \Leftrightarrow 18=9a \ \Leftrightarrow a=2$$

ora inserendo le coordinate di V e il valore di a nell'equazione * e sviluppando i calcoli otteniamo l'equazione richiesta:

$$y=2(x-1)^2-8 \ \Leftrightarrow y=2x^2-4x-6$$

Alternativamente per trovare l'equazione si poteva procedere in questo modo: l'equazione di una parabola con asse parallelo all'asse y è di tipo $y = ax^2 + bx + c$, e il vertice ha coordinate $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ dunque, ricordando anche che il vertice appartiene alla parabola, possiamo determinare i parametri *a, b, c* risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ -8 = a + b + c \\ 10 = 16a + 4b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ a + b + c = -8 \\ 15a + 3b = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ a - 2a + c = -8 \\ 5a + b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ -a + c = -8 \\ 5a - 2a = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -2a \\ c = a - 8 \\ 3a = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ c = -6 \\ a = 2 \end{cases}$$

Poiché il termine noto dell'equazione di una parabola con asse verticale è l'ordinata del punto di intersezione della parabola con l'asse y possiamo affermare che la parabola interseca l'asse y in (0;-6).

Per trovare le coordinate dei punti di intersezione con l'asse x dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 4x - 6 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4x - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+1) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$ perciò la parabola interseca l'asse x in (-1;0) e (3;0).

---

3. In un triangolo ABC i lati misurano 3,4,6.

a) Dimostrare che il triangolo è ottusangolo

b) Trovare il valore del coseno dei due angoli acuti.

SOLUZIONE

siano a=3, b=4 e c=6 i lati del triangolo; poiché in un triangolo se due lati sono diversi al lato maggiore è opposto un angolo maggiore, basta stabilire se è ottuso γ, e quindi basta calcolare il coseno di γ applicando il teorema di Carnot.

Per il teorema di Carnot

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

da cui si ricava

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

quindi $\cos\gamma = \frac{3^2 + 4^2 - 6^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{9 + 16 - 36}{24} = -\frac{11}{24}$

Essendo $\cos\gamma < 0$ ed essendo γ uno degli angoli di un triangolo, possiamo affermare che γ è ottuso e dunque il triangolo dato è ottusangolo.

Per trovare il valore del coseno dei due angoli acuti applichiamo nuovamente il teorema di Carnot:

da $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ ricaviamo $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{16 + 36 - 9}{48} = \frac{43}{48}$

mentre da $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \quad \cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{9 + 36 - 16}{36} = \dfrac{29}{36}$

4.Risolvere la seguente disequazione:

$$\log_5(x-1) - 2\log_5(x+1) - \log_5 2 \leq -2$$

SOLUZIONE
La disequazione data ha come condizioni di esistenza

$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$

e si può riscrivere nella forma

$$\log_5(x-1) + 2 \leq \log_5 2 + 2\log_5(x+1)$$

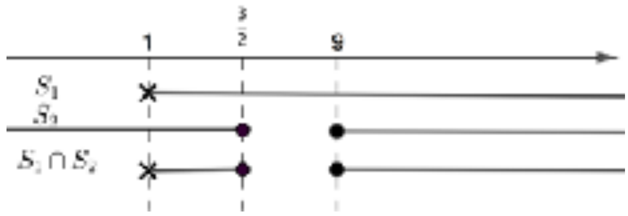
per $x > 1$ abbiamo
$\log_5(x-1) + \log_5 25 \leq \log_5 2 + \log_5(x+1)^2$

$\log_5[25(x-1)] \leq \log_5[2(x+1)^2]$
la funzione logaritmica con base 5 è strettamente crescente, quindi, considerando anche le condizioni di esistenza, la disequazione data è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x > 1 \\ 2x^2 - 21x + 27 \geq 0 \end{cases}$$

le soluzioni dell'equazione associata alla seconda disequazione sono:
$x_{1,2} = \dfrac{21 \pm \sqrt{441 - 216}}{4} = \dfrac{21 \pm 15}{4} \quad x_1 = \dfrac{3}{2} \ \vee \ x_2 = 9$
quindi

$\begin{cases} x > 1 \\ x \leq \frac{3}{2} \vee x \geq 9 \end{cases}$



da cui si ricava che l'insieme delle soluzioni della disequazione assegnata è

$$S =]1; \frac{3}{2}] \cup [9; +\infty[$$

5. **Calcolare il seguente limite:** $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2 - 4} - \sqrt{4x^2 - 1})$

SOLUZIONE
Si tratta di una forma indeterminata $\infty - \infty$ che però si risolve molto facilmente dal momento che i coefficienti di x^2 nelle due radici sono diversi, infatti si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-4} - \sqrt{4x^2-1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} - \sqrt{x^2\left(4 - \frac{1}{x^2}\right)}\ \right) =$$

$= \lim_{x\to+\infty} |x| \left(\sqrt{1-\frac{4}{x^2}} - \sqrt{4-\frac{1}{x^2}}\right) = -\infty$ poiché $|x|$ tende a $+\infty$ mentre il termine in parentesi tende a -1.

---

6. **Una funzione reale $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato [3;7] e derivabile nell'intervallo aperto]3;7[. Inoltre $f(3) = 1$ e $0 \le f'(x) \le \frac{1}{2}$ per ogni x dell'intervallo]3;7[. Spiegare in maniera esauriente perché risulta $1 \le f(7) \le 3$.**

SOLUZIONE:
La funzione f(x) verifica le ipotesi del Teorema di Lagrange nell'intervallo [3;7], quindi possiamo dire che $\exists\ c \in \left]3;7\right[$ tale che $f'(c) = \frac{f(7)-f(3)}{7-3} = \frac{f(7)-1}{4}$.
Segue allora, dalle ulteriori ipotesi presenti nella traccia, che $0 \le \frac{f(7)-1}{4} \le \frac{1}{2}$. Di conseguenza avremo $0 \le f(7)-1 \le 2$ da cui discende banalmente che $1 \le f(7) \le 3$.

---

7. **Determinare l'equazione della tangente al grafico di $y = sen^2x + sen(2x)$ nel suo punto di ascissa $\frac{\pi}{2}$.**

SOLUZIONE:
Data $y = f(x)$, sia $P_0(x_0, f(x_0))$ un punto appartenente al grafico di f(x) in cui esiste la derivata di f(x). Sappiamo allora che l'equazione della tangente in P_0 al grafico di f(x) ha equazione

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \bullet (x - x_0).$$

Nel nostro caso si ha:

$x_0 = \frac{\pi}{2}$, $f(x_0) = 1, f'(x) = 2sinxcosx + 2cos2x$ e quindi $f'(x_0) = -2$.
Per cui l'equazione della tangente sarà $y - 1 = -2 \bullet (x - \frac{\pi}{2})$ che semplificata fornisce la retta cercata $y = -2x + \pi + 1$.

---

8. **Data la funzione $y = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}$, studiarne il comportamento agli estremi del dominio e determinare gli asintoti della funzione.**

SOLUZIONE:
Si tratta di una funzione razionale fratta il cui dominio è costituito dall'insieme

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\ e\ x \neq 1\}$$

che può anche scriversi come

$$D = (-\infty, -1) \cup (-1,1) \cup (1, +\infty)$$

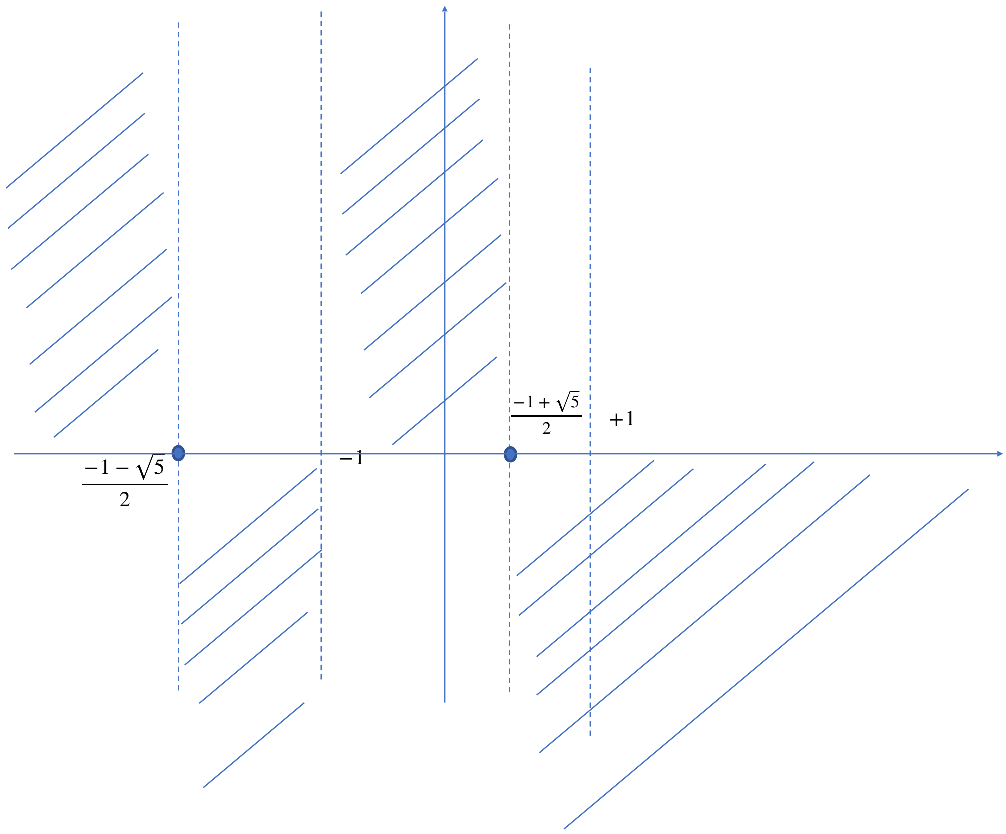
Gli estremi del Dominio sono quindi

$$-\infty, \quad -1, \; 1, \; +\infty$$

Per meglio studiare il comportamento agli estremi del Dominio, è opportuno studiare il **segno** della nostra funzione. Risolviamo quindi la disequazione:

$$\frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} \geq 0$$

da cui otteniamo dopo semplici calcoli, la seguente rappresentazione grafica del segno della funzione:



Valutiamo quindi il comportamento agli estremi del Dominio:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

da ciò segue che la retta di equazione $\boldsymbol{x = -1}$ **è asintoto verticale** per la funzione.

Invece abbiamo:

$$\lim_{x \to +1^{\pm}} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{0}{0} \text{ (Forma indeterminata).}$$

Ma il numeratore può essere scritto come $x^3 - 2x + 1 = (x - 1)(x^2 + x - 1)$, quindi si ottiene:

$$\lim_{x \to +1^{\pm}} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to +1^{\pm}} \frac{(x - 1)(x^2 + x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \to +1^{\pm}} \frac{(x^2 + x - 1)}{(x + 1)} = \frac{1}{2} \; ,$$

pertanto $\boldsymbol{x = +1}$ rappresenta un **punto di discontinuità eliminabile**. In altre parole la nostra funzione passa per il punto $P \equiv \left(+1; \frac{1}{2}\right)$.

Studiamo ora il comportamento all'infinito.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} = +\infty$$

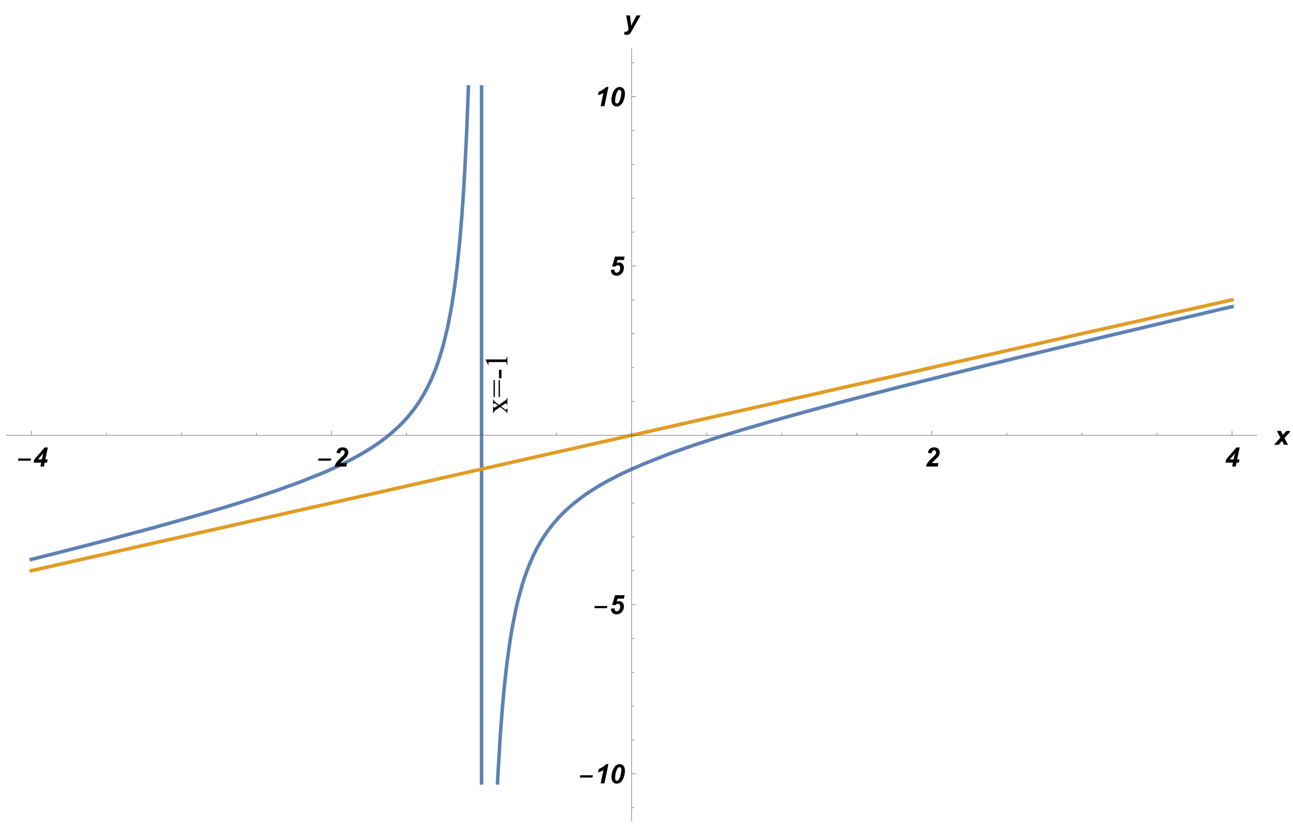
(come si vede facilmente dal segno della funzione e dal fatto che il numeratore ha grado maggiore del denominatore). Quindi la nostra funzione non possiede Asintoti Orizzontali.

Vediamo allora se ci sono Asintoti Obliqui. Come sappiamo, tali rette (se esistono!) sono del tipo $y = mx + q$, dove m e q si determinano nel modo seguente:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^3 - x} = +1$$

$$q = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} [\frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1} - x] = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2x + 1 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{-x + 1}{x^2 - 1} = 0$$

Quindi **la retta di equazione $\boldsymbol{y = x}$ è Asintoto Obliquo** per la nostra funzione. Ciò conclude l'esercizio. Aggiungiamo il grafico della funzione anche se ciò non era richiesto dall'esercizio proposto.



9. Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{x}\,dx$$

SVOLGIMENTO:
Risolviamo dapprima l'integrale indefinito:

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{x}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{\sqrt{x}}{x}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = ln|x| - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + k = ln|x| - 2\sqrt{x} + k$$

Abbiamo quindi l'insieme delle primitive:

$\boldsymbol{F(x) = ln|x| - 2\sqrt{x} + k}, k \in \mathbb{R}$.

Per il Teorema Fondamentale del calcolo integrale (possiamo applicarlo usando la primitiva corrispondente a k = 0) avremo che:

$$\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{x}dx = F(4) - F(1) = ln4 - 4 - 0 + 2 = -2 + \boldsymbol{ln}4$$

10. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}\,dx$$

SVOLGIMENTO:
Indichiamo con

$$\mathcal{J} = \int \frac{x+3}{x^2-5x+6}dx$$

Applicando gli usuali metodi di decomposizione di una frazione si ottiene:

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6} = \frac{x+3}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax-2A+Bx-3B}{(x-3)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A-3B}{(x-3)(x-2)}$$

Usando il Principio di identità dei polinomi, impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A-3B=3 \end{cases}$$

Da cui segue facilmente che $A=6$ e $B=-5$.
Quindi:

$$\mathcal{J} = \int \frac{6}{x-3}dx - \int \frac{5}{x-2}dx = \mathbf{6\,ln|x\text{-}3|-5\,ln\,|x\text{-}2|+k.}$$