

## PROVIMI I MATURËS SHTETËRORE 2018

### SESIONI I

### ZGJIDHJE

Lënda: MATEMATIKË E THELLUAR

VARIANTI **A**

#### 1. Përgjigjet për pyetjet 1-10.

Pyetja	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Alternativa e saktë	D	B	B	B	A	C	B	A	C	C

#### 2. Një mënyrë zgjidhje për pyetjet 11-20

11.

3 pikë

Shënojmë  $R$  rrezen e rrethit. Meqënëse masa e harkut  $AB$  është  $90^\circ$ , këndi qendror  $AOB$  është  $90^\circ$ . Syprina e pjesës së vijëzuar gjendet duke zbritur nga syprina e sektorit qarkor, syprinën e trekëndëshit kënddrejtë  $AOB$ .

$$\text{Pra: } S_v = S_{\text{sek.qarkor}} - S_{\Delta AOB}$$

Gjejmë fillimisht rrezen e rrethit duke zbatuar teoremën e Pitagorës në trekëndëshin kënddrejtë  $AOB$ .

$$AO^2 + OB^2 = AB^2$$

$$R^2 + R^2 = 36 \Rightarrow R^2 = 18 \Rightarrow R = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

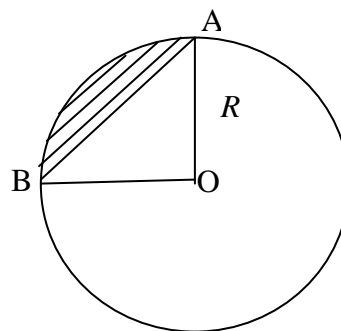
Gjejmë syprinën e sektorit qarkor  $AOB$ :

$$S_{\text{sek.qarkor}} = \frac{1}{4} \pi R^2 = \frac{18\pi}{4} = 4.5\pi = 14.13 \text{ cm}^2.$$

Gjejmë syprinën e trekëndëshit  $AOB$ :

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB = \frac{R^2}{2} = 9 \text{ cm}^2$$

$$S_v = S_{\text{sek.qarkor}} - S_{\Delta AOB} = 4.5\pi - 9 = 14.13 - 9 = 5.13 \text{ cm}^2.$$



12. 2 pikë

Shënojmë numrat  $x_1$  dhe  $x_2$ .

$$\text{Atëherë kemi: } \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{7}{24} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{7}{12} \text{ dhe } \frac{x_1 - x_2}{4} = \frac{1}{48} \Rightarrow x_1 - x_2 = \frac{1}{12}$$

Formojmë sistemin e ekuacioneve:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{7}{12} \\ x_1 - x_2 = \frac{1}{12} \end{cases}$$

$$2x_1 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{7}{12} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

Pra, numrat janë  $\frac{1}{4}$  dhe  $\frac{1}{3}$ .

13. 3 pikë

Gjejmë syprinën e trekëndëshit me formulën:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB} \times \overline{AC}|$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 1 & 2 \\ \vec{j} & 3 & -1 \\ \vec{k} & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 5\vec{j} - 7\vec{k}$$

$$\text{Pra: } \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{1^2 + (-5)^2 + (-7)^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}.$$

$$\text{Atëherë } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ njësi katrore.}$$

14. 3 pikë

a)

Gjejmë bashkësinë e përcaktimit të funksionit:  $E = \mathbb{R}$ .

Gjejmë derivatin e parë dhe i studiojmë shenjën:

$$y' = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)' = 2xe^x + x^2 e^x = e^x (2x + x^2)$$

$$e^x (2x + x^2) = 0$$

$e^x$  është pozitiv në  $\mathbb{R}$ . Atëherë shenja e derivatit varet nga shenja e polinomit  $(2x + x^2)$ .

$$(2x + x^2) = 0 \Rightarrow x(2 + x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ose } x = -2$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$+\infty$	
$y'$	+	0	-	0	+
$y$	↗		↘		↗
	max		min		

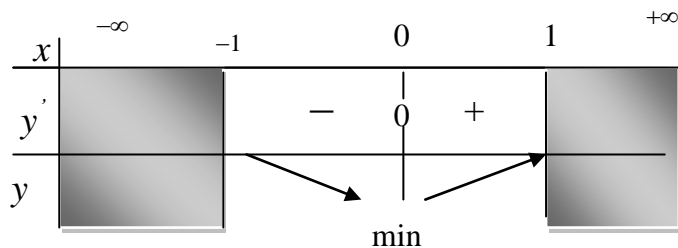
Për  $x \in ]-\infty; -2[$  funksioni është rritës;

Për  $x \in ]-2; 0[$  funksioni është zbritës;

Për  $x \in ]0; +\infty[$  funksioni është rritës;

Për  $x = -2$  funksioni ka maksimum; për  $x = 0$  funksioni ka minimum;

b) 2 pikë



Meqënëse në intervalin  $x \in ]-1; 1[$  funksioni ka vetëm një minimum, ky minimum është dhe vlera më e vogël e funksionit. Pra,  $m = f(0) = 0$ .

c) 2 pikë

Ekuacioni i tangentes me vijën në pikën  $x = 1$  është:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$f(1) = e$  dhe  $f'(1) = 3e$ . Zëvendësojmë tek ekuacioni i tangentes dhe marrim:

$$y - e = 3e(x - 1) \Rightarrow y = 3ex - 2e \Rightarrow y = e(3x - 2)$$

15. 3 pikë

Vendosim kushtet për bashkësinë e përcaktimit:

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x-1) - 1 \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \geq 1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \geq \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2} \\ x > 1 \end{cases}$$

Meqënëse baza e logaritmit është më e vogël se 1,  $\log_{\frac{1}{2}} x$  është monoton zbritës. Pra, kemi:

$$\begin{cases} x-1 \leq \frac{1}{2} \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ x > 1 \end{cases}$$

Pra, bashkësia e përcaktimit është:  $x \in \left]1; \frac{3}{2}\right]$ .

16. 2 pikë

Zbatojmë formulën e shumës për progresionin gjeometrik të pafundëm:

$$S = \frac{y_1}{1-q} \Rightarrow 1-q = \frac{y_1}{S} \Rightarrow q = 1 - \frac{y_1}{S} \Rightarrow q = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

Pra, herësi i këtij progresioni është  $q = \frac{1}{2}$ .

17.

2 pikë

Shumëzojmë me 2 të dy anët e ekuacionit:

$$2 \sin \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{4} = 2 \cdot \frac{1}{4}.$$

Pra:  $\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ . Dimë se  $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$  dhe  $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$

Meqënëse zgjidhjet i kërkojmë në segmentin  $[0; 2\pi]$  kemi:

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ ose } \frac{x}{2} = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{3}.$$

Pra, zgjidhjet janë:  $\left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \right\}$

18.

3 pikë

Meqënëse  $AD = DC$  rrjedh që trekëndëshi  $ADC$  është dybrinjënjëshëm. Pra, këndet  $DAC$  dhe  $ACD$  janë të barabartë. Rrjedh që  $\angle DAC = \angle ACD = 35^\circ \Rightarrow \angle ADC = 110^\circ$

Dimë që bazat e trapezit janë paralele, prandaj:

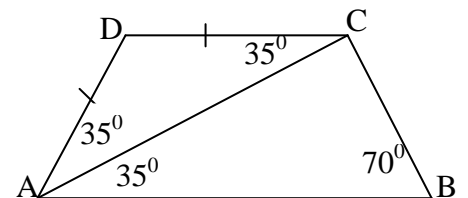
$$AB \parallel DC \Rightarrow \angle BAC = \angle ACD = 35^\circ \text{ (si kënde ndërrues të brendshëm)}$$

Pra, kemi:  $\angle BAC = 35^\circ$  dhe  $\angle DAC = 35^\circ$ . Nga del që  $\angle BAD = 70^\circ$

Atëherë kemi:  $\angle BAD = \angle ABC = 70^\circ$ . Del që edhe  $\angle BCD = 110^\circ$ .

Dimë që katërkëndëshit i jashtëshkruhet rreth atëherë dhe vetëm atëherë kur këndet e kundërta i ka shtues.

Shohim që  $\angle DAB + \angle BCD = 70^\circ + 110^\circ = 180^\circ$  gjë që sjell që trapezit të dhënë i jashtëshkruhet rreth.



19.

2 pikë

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} < 3 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2} < 3 \Rightarrow |x-1| < 3 \Rightarrow -3 < x-1 < 3 \Rightarrow -2 < x < 4$$

Pra,  $x \in ]-2; 4[$ .

20.

3 pikë

Pika e dyshimtë për vazhdueshmërinë e funksionit është pika  $x = 1$ .

Studiojmë vazhdueshmërinë e funksionit për  $x = 1$ :

- $\exists f(1) = k$

- $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{1 - \sqrt{x}} = \frac{0}{0}$  f.p. c

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{1 - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(1 + \sqrt{x})}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(1 + \sqrt{x})}{1 - x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[ -(x+1)(1 + \sqrt{x}) \right] = -4$$

- $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow k = -4$

Pra, për  $k = -4$  funksioni i dhënë është i vazhduar në pikën  $x = 1$  dhe për rrjedhojë është i vazhduar edhe në  $\mathbb{R}$ .