OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS

Viti mësimor 2013-2014 **Faza e tretë** **e mesme**

1. Gjeni të gjitha çiftet e numrave realë $(a;b)$ të plotë që vërtetojnë barazimin $a^2 + b = b^{1999}$.

$a^2 = b(b^{1998}-1)$ nëse supozojmë $b \geq 2$, atëherë b dhe $b^{1998}-1$ janë katrorë të plotë. Por b^{1998} është i tillë, katror i plotë, prandaj $b^{1998}-1$ s'mund të jetë i tillë. Bie supozimi $b \geq 2$. Rasti $b \leq -2$ është i pamundur pasi kemi në $a^2 < 0$. Mbetet $b \leq 1$. Rastet janë $b=1$, $b=0$ dhe $b=-1$. Të gjitha japin $a=0$. Çiftet janë $(0;-1)$, $(0;0)$ dhe $(0;1)$

2. Jepet ekuacioni $x^2 + (a-2)x - 2a^2 + 5a - 3 = 0$. Gjeni të gjitha vlerat a të tilla që vlera absolute e njërës prej rrënjëve të ekuacionit të jetë sa dyfishi i vlerës absolute të rrënjës tjetër.

$$x = \frac{-(a-2) \pm \sqrt{(a-2)^2 - 4\cdot(-2a^2+5a-3)}}{2} = \frac{2-a \pm \sqrt{a^2-4a+4+8a^2-20a+12}}{2} =$$

$$= \frac{2-a \pm \sqrt{9a^2-24a+16}}{2} = \frac{2-a \pm \sqrt{(3a-4)^2}}{2}$$

$$x_1 = \frac{2-a-(3a-4)}{2} = -2a+3, \quad x_2 = \frac{2-a+(3a-4)}{2} = a-1$$

Supozoj $|x_1| = 2|x_2|$ duhet $|-2a+3| = 2\cdot|a-1|$. Numrat $a-1$ dhe $-2a+3$ janë negativë nëse $a<1$ dhe $a > \frac{3}{2}$ përkatësisht. Pra nëse $a<1$ kemi kushtin $-2a+3 = 2(1-a)$ dhe nëse $a > \frac{3}{2}$ kemi kushtin $2a-3 = 2(a-1)$. Të dyja rastet janë të pamundura.

Mbetet $1 \le a \le \frac{3}{2}$, e cila jep $-2a+3 = 2(a-1)$, ose $a=\frac{5}{4}$

Supozojmë $|x_2| = 2|x_1|$ atëherë $|a-1| = 2\cdot|-2a+3|$

Për $a<1$ kemi $1-a = 2(-2a+3)$, ose $a=\frac{5}{3}>1$. Pra s'mund të kemi $a<1$

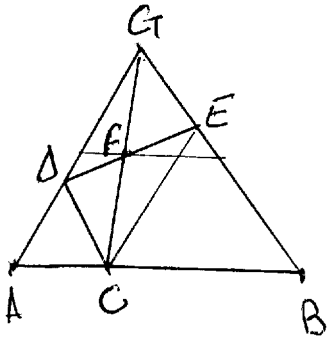
Nëse $1 \le a \le \frac{3}{2}$ kemi $a-1 = 2(-2a+3)$, ose $a=\frac{7}{5}$

Nëse $a>\frac{3}{2}$ kemi $a-1 = 2(2a-3)$, ose $a=\frac{5}{3}$

Përgjigje Vlerat e a-së $\frac{5}{4}, \frac{7}{5}$ dhe $\frac{5}{3}$

brendësi tij.

3. Jepet segmenti AB dhe një pikë C çfardoshme në të. Ndërtohen trekëndëshat barabrinjës ADC dhe CEB në të njëjtën pjesë të planit të ndarë nga AB. Gjeni bashkësinë e të gjithë pikave të planit që janë mesi i segmentit DE.



Shënojmë F mesin e DE. Zgjatimet e AD dhe BE priten në G. Katërkëndëshi ECDG është paralelogram dhe F mesi i diagonaleve.

Kur C lëviz në AB pika F është mes i CG, pra lëviz në vijën e mesme të ΔGAB (paralele me AB)

Pra vija e mesme e trekëndëshit barabrinjës me bazë brinjë AB (paralele me AB) është bashkësia e pikave F.

Përjashtohen pikat) rastet që C merret në A ose B (shënuar në të dhënat)

4. Gjeni gjithë çiftet e numrave ~~reale~~ të plotë (m;n) që vërtetojnë barazimin $(m-n)^2 = \frac{4mn}{m+n-1}$

Shumëzojmë me $m+n-1$

$(m-n)^2(m+n-1) = 4mn$

$(m+n)^2 = (m-n)^2(m+n) \iff m+n=0$ ose $m+n=(m-n)^2$

$m+n=0 \Rightarrow m=-n$ druth gjithë çiftet $(k,-k)$, k - i plotë real

$m-n=k \Rightarrow m+n=k^2$ dhe $m=\frac{k^2+k}{2}$, $n=\frac{k^2-k}{2}$

Në kryе duhet konsideruar emëruesi i ndryshëm nga zero. ($m+n-1 \neq 0 \iff k \neq 1$ dhe $k \neq -1$)

Përgjigje Vërtetojnë barazimin të gjitha çiftet $(k,-k)$ dhe $\left(\frac{k(k+1)}{2}, \frac{k(k-1)}{2}\right)$, ku k është numër ~~real~~ i plotë real çfarëdo, përveç rasteve $(1,0)$ dhe $(0,1)$

5. Jepet numri ~~real~~ i plotë a. Gjeni të gjitha zgjiidhjet reale të ekuacionit $[x] = ax+1$ ku $[x]$ është shënuar pjesa e plotë e numrit x.

Nisemi nga mosbarazimi i vërtetë $x-1 < [x] \leq x$

1) Nëse $a=0$, atëherë $[x]=1$ druth $1 \leq [x] < 2$

2) Megë $[x] \leq x < x+1$, ekuacioni nuk ka zgjidhje nëse $a=1$

3) Për $a \geq 2$ kemi $(a-1)x > -2$ dhe $(a-1)x \leq -1$ ose

$-\frac{2}{a-1} < x \leq -\frac{1}{a-1}$ $\left(-\frac{2}{a-1} \geq -2 \text{ dhe } -\frac{1}{a-1} < 0\right)$

• nëse $a=2 \Rightarrow [x]=-2$ ose $[x]=-1$. Vlerat korresp. të x-it janë $x=-\frac{3}{2}$ dhe $x=-1$ (këto janë zgjidhjet reale)

• nëse $a>2$, atëherë e vetmja numrlësi është $[x]=-1$ dhe $x=-\frac{2}{a}$ që e vërteton ekuacionin

4) Për $a \leq -1$ kemi $\frac{2}{1-a} > x \geq \frac{1}{1-a}$ $(a-1<0)$

$\frac{1}{1-a} > 0$ dhe $\frac{2}{1-a} \leq 1$ sjellin $[x]=0$.

Rasti $a=-1$ na çon në kontradiksion,

nëse $a<-1$, atëherë zgjidhja është $x=-\frac{1}{a}$

Përgjigje Nëse $a<-1$, atëherë $x=-\frac{1}{a}$,

nëse $a=0$, atëherë çdo nr. real x ~~dhe~~ $1 \leq x < 2$

nëse $a=2$, atëherë $x=-\frac{3}{2}$ ose $x=-1$

nëse $a>2$, atëherë $x=-\frac{2}{a}$

Nëse $a=\pm 1$, atëherë ek. nuk ka zgjidhje.