REPUBLIKA E SHQIPËRISË

MINISTRIA E ARSIMIT

DHE SPORTIT

AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS

Viti mësimor 2015-2016 **Faza e dytë** **Klasa 9**

Olimpiada fillon në orën 10.00 dhe mbaron në orën 13.00.

1. Numri katërshifror $n \in N$ është i tillë që po të lexohet nga e djathta në të majtë, merret i njëjti numër n. Gjeni duke arsyetuar, cili është numri që plotëpjeston n.

Zgjidhje

$n \in N$, n katërshifror, $n = abcd \Rightarrow a = d \wedge b = c$

pra $n = abba \Rightarrow n = 1000a + 100b + 10b + a \Rightarrow$

$n = 1001a + 110b$

$= 91 \cdot 11\, a + 11 \cdot 10b$

$= 11(91a + 10b)$

$= 11 \cdot A$ ku $A = 91a + 10b$

Pra, numri që plotpjesëton $n \in N$, që plotëson kushtin e mëpipërm është 11.

2. Tregoni që $\sqrt{(1+a^2)} \cdot \sqrt{(1+b^2)} \geq 1 + ab$ ku $a, b \in R$.

Zgjidhje

$\sqrt{(1+a^2)} \cdot \sqrt{(1+b^2)} = \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$

$= \sqrt{1 + a^2 + b^2 + a^2b^2}$

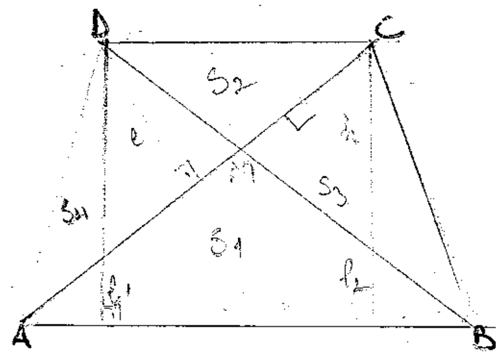
$= \sqrt{1 + a^2 + b^2 + a^2b^2 + 2ab - 2ab}$

$= \sqrt{(1 + 2ab + a^2b^2) + (a^2 - 2ab + b^2)}$

$= \sqrt{(1+ab)^2 + (a-b)^2} \geq \sqrt{(1+ab)^2} = |1+ab| \geq 1 + ab$

Pra $\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2} \geq 1 + ab$

3. Sipërfaqja e një katërkëndëshi të mysët $ABCD$ është S dhe diagonalet e tij priten në M. Të vërtetohet se kur sipërfaqjet S_1 dhe S_2 të trekëndëshit MAB dhe trekëndëshit MCD plotësojnë kushtin $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$, atëhere katërkëndëshi është trapez.



Zgjidhje

Nga të dhënat kemi që:

$S_{\Delta AMB} = S_1$, $S_{\Delta DMC} = S_2$,

$S_{\Delta BCM} = S_3$, $S_{\Delta AMD} = S_4$

Meqë $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} \Rightarrow S = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2}$

Për $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \Rightarrow S_3 + S_4 = 2\sqrt{S_1 \cdot S_2}$

Kemi $\dfrac{S_1}{S_3} = \dfrac{AM \cdot \cancel{h}}{MC \cdot \cancel{h}} = \dfrac{AM}{MC}$

$\dfrac{S_4}{S_2} = \dfrac{AM \cdot \cancel{l}}{MC \cdot \cancel{l}} = \dfrac{AM}{MC}$

$\dfrac{S_1}{S_3} = \dfrac{S_4}{S_2} \Rightarrow S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4$

$S_3 + S_4 = 2\sqrt{S_1 \cdot S_2} \Rightarrow (\sqrt{S_3})^2 - 2\sqrt{S_3} \cdot \sqrt{S_4} + (\sqrt{S_4})^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{S_3} - \sqrt{S_4} = 0 \Rightarrow$

$\sqrt{S_3} = \sqrt{S_4} \Rightarrow S_3 = S_4 \Rightarrow S_1 + S_3 = S_1 + S_4 \Rightarrow S_{\Delta ABD} = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot l_1 = \frac{1}{2} AB \cdot l_2$

Po të shënojmë me l_1, l_2 lartësitë e ΔABD, ΔABC, kemi $l_1 = l_2$ dmth. meqë gjatësitë e pinguleve të hequra nga D dhe C janë të barabarta, kemi $DC \parallel AB \Rightarrow ABCD$ është trapez.

4. A është e mundur që në një tabelë me pesë rreshta dhe pesë shtylla të shkruajmë numrat 1,2,3,…,24,25 në mënyrë të tillë që shuma e numrave të cdo rreshti të jetë e barabartë me shumën e shifrave të rreshtave të tjerë. (Duke arsyetuar)

Zgjidhje.

Supozojmë se numrat e mësipërm mund të shkruhen në një tabelë të tillë, duke plotësuar kushtin e ushtrimit. Atëherë shuma e shifrave të tabelës në çdo rresht është çift. Kjo do të thotë:

$n_5 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \Rightarrow n_5$, çift $\Rightarrow n_5 + (n_1 + n_2 + n_3 + n_4)$, çift

Por, nga ana tjetër shuma e të gjitha shifrave të tabelës $1 + 2 + 3 + \dots + 24 + 25 = 325 \rightarrow$ tek (?!), prej nga rrjedh absurditeti. Rrjedhimisht nuk është e mundur vendosja e numrave 1, 2, 3, …, 24, 25 në kushtet e ushtrimit të mësipërm.

5. n mullinj duke punuar për n orë në ditë prodhojnë për n ditë n kv miell. Sa kv miell është e mundur të prodhohen duke pasur në dizpozicion m mulinj që punojnë m orë në ditë për m ditë. (Duke shprehur rezultatin në varësi të m dhe n).

Zgjidhje

Një mulli duke punuar një orë në ditë për n ditë, prodhon $n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$ kv miell në orë.

Si rrjedhim m mullinj për m orë dhe m ditë prodhojnë $\frac{1}{n^2} \cdot m \cdot m \cdot m = \frac{m^3}{n^2}$ kv miell.

REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
DHE SPORTIT
AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS

Viti mësimor 2015-2016 **Faza e dytë** **Klasa 10**

Olimpiada fillon në orën 10.00 dhe mbaron në orën 13.00.

1. Tregoni që $7^{37}+13^{37}+19^{37}$ plotëpjestohen prej numrit 39 ndryshe shënohet simbolikisht $39 \mid 7^{37}+13^{37}+19^{37}$.

Zgjidhje

Shënojmë $a=7^{37}+13^{37}+19^{37}$

Mjafton të tregojmë që $3|a$ dhe $13|a$

Kemi $a=7^{37}+13^{37}+19^{37}$

$a=(6+1)^{37}+(12+1)^{37}+(18+1)^{37}$

Kemi $a=6A+12B+18C+1+1+1=6A+12B+18C+3$

Pra $3|a$

Nga ana tjetër

$a=7^{37}+13^{37}+19^{37}$

$a=(13-6)^{37}+13^{37}+(13+6)^{37}$

$a=13\cdot C+13^{37}+13\cdot D+6^{37}+(-6)^{37}$

Kemi që $(-6)^{37}+6^{37}=-\cancel{6^{37}}+\cancel{6^{37}}=0$

pra $a=13C+13^{37}+13D \Rightarrow 13|a$

Meqë $3|a$ dhe $13|a \Rightarrow 39|a \Rightarrow 39|7^{37}+13^{37}+19^{37}$

2. Gjeni të gjithë numrat e plotë $a \in \mathbb{Z}$ për të cilat ekuacioni $x^2 + ax + a = 0$ i ka rrënjët numra të plotë.

Zgjidhje.

$x^2 + ax + a = 0 \qquad A = 1, \; B = a, \; C = a$

Le të jenë x_1, x_2, rrënjet e ekuacionit të mësipërm. Nga formulat e Vietës kemi që:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a & \left(= -\frac{B}{A}\right) \\ x_1 \cdot x_2 = a & \left(= \frac{C}{A}\right) \end{cases} \qquad Ax^2 + Bx + C = 0$$

Kemi që $(x_1+1)(x_2+1)$, më se e gjymë si vlerë kemi:

$(x_1+1)(x_2+1) = x_1 \cdot x_2 + (x_1 + x_2) + 1 = a - a + 1 = 1$ pra $(x_1+1)(x_2+1) = 1$

$x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_1 + 1 \in \mathbb{Z}, \; x_2 + 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 + 1 = 1 \\ x_2 + 1 = 1 \end{cases} \text{ ose } \begin{cases} x_1 + 1 = -1 \\ x_2 + 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \text{ ose } \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$x_1 + x_2 = -a \qquad x_1 + x_2 = -a$

$0 = -a \qquad -4 = -a$

$a = 4$

Pra, $a = 0$ ose $a = 4$.

3. Të vërtetohet mosbarazimi: $\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{y^4+x^2} \leq \frac{1}{xy}$, $x, y \in \mathbb{R}^{*+}$

Dimë që $(A-B)^2 \geq 0 \Leftrightarrow A^2 + B^2 \geq 2AB$ ku $A, B \in R$

$\begin{cases} A = x^2 \\ B = y \end{cases} \Rightarrow x^4 + y^2 \geq 2x^2y \Rightarrow \frac{1}{2x^2y} \geq \frac{1}{x^4+y^2}$

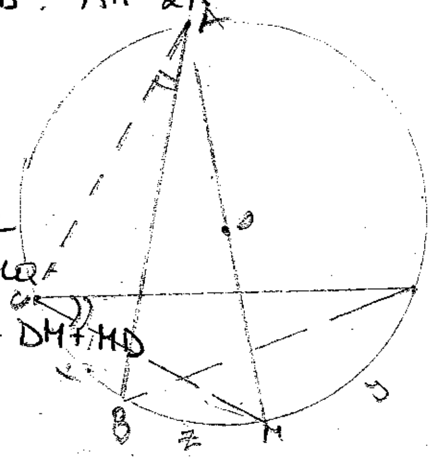
$\begin{cases} A = y^2 \\ B = x \end{cases} \Rightarrow y^4 + x^2 \geq 2y^2x \Rightarrow \frac{1}{2y^2 \cdot x} \geq \frac{1}{y^4+x^2}$

$$\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{y^4+x^2} \leq \frac{2xy}{2x^2y^2} = \frac{1}{xy}$$

Pra $\forall x, y \in R^{*+}$, $\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{y^4+x^2} \leq \frac{1}{xy}$

4. Në një rreth jepen dy korda pingule . Të vërtetohet që katrori i diametrit të rrethit është i barabartë me shumën e katrorëve të katër segmenteve që formohen nga pikëprerja e koordave.

Heqim diametrin AH dhe kordat CH dhe BD . $AH = 2R$



Në ΔACH, $\hat{C} = 90^\circ$ (mbështetet në diametër)

$AH^2 = AC^2 + CH^2$ (T. P)

Kemi që $C\hat{A}B = D\hat{C}H$ si kënde me brinjë pingule. Atëherë $\overset{\frown}{CXB} = \overset{\frown}{HYD}$, harqe të barabarta => tendosin kordat të barabarta => $BC = HD \Rightarrow CH = BD$ sepse $CB + BH = DH + HD$

Pra $CH = BD$

$AH^2 = AC^2 + CH^2$

$AH^2 = AC^2 + BD^2$

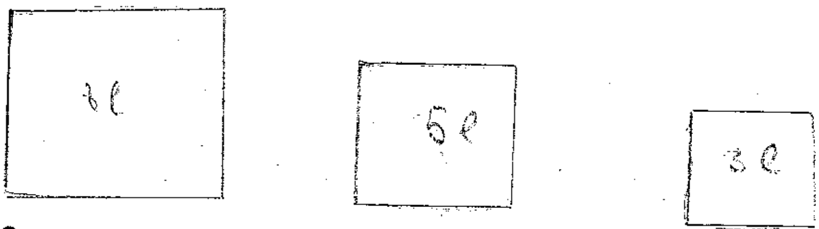
Në ΔACP $(P = 90^\circ)$ $\overset{T.P}{\Longrightarrow}$ $AC^2 = CP^2 + AP^2$

Në ΔBPD $\overset{T.P}{\Longrightarrow}$ $BD^2 = BP^2 + PD^2$

Prej nga $CP^2 + AP^2 + BP^2 + PD^2 = (AH)^2 = (2R)^2$

Pra $CP^2 + AP^2 + BP^2 + PD^2 = 4R^2$.

5. Kemi tri enë A, B, C që nxënë respektivisht 8*l* , 5*l* dhe 3*l* secila. Ena A është e mbushur plot dhe dy të tjerat bosh. Këto tri enë janë të vetmet masë vellimi që kemi. Arsyetoni se si në enët A dhe B mund të vendosim nga 4*l*.



A B C → 8 , 0 , 0 në fillim

1) A B C → 3 5 0 A → B | A = 3, B = 5, C = 0

2) A B C → 3 2 3 B → C | A = 3, B = 2, C = 3

3) A B C → 6 , 2 , 0 A ← C | A = 6, B = 2, C = 0

4) A B C → 6 , 0 , 2 B C | A = 6, B = 0, C = 2

5) A B C → 1 , 5 , 2 A → B | A = 1, B = 5, C = 2

6) A B C → 1, 4, 3 B C | A = 1, B = 4, C = 3

7) A B C → 4, 4, 0 A ← C | A = 4, B = 4, C = 0

REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
DHE SPORTIT
AGJENCIA KOMBETARE E PROVIMEVE

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS

Viti mësimor 2015-2016 **Faza e dytë** **Klasa 11**

Olimpiada fillon në orën 10.00 dhe mbaron në orën 13.00.

1. Le të jenë $a_1 = 2+1$, $a_2 = 2\cdot 3+1$, $a_3 = 2\cdot 3\cdot 5+1$, $a_4 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7+1$, $a_5 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11+1$ ..., Tregoni që nuk ekziston numër i trajtës a_k i tillë që a_k të jetë katror i një numri natyror.

Në fillim tregojmë cila është trajta e një numri $a \in N$, i cili jepet si katror i një numri të plotë $a = n^2$

Kemi $n = 2k$, çift $a = (2k)^2 = 4k^2 = 4r$, $r \in N$

$n = 2k+1$, tek $a = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 4(k^2+k)+1$

$a = 4r+1$ $r \in N$

a katror i plotë $\Rightarrow a = 4r$ ose $a = 4r+1$

Pra, $a = 4r$ ose $4 = 4r+1$, $r \in N$

Kemi nga ushtrimi i mësipërm:

$a_1 = 2^0+1$, $a_2 = 2p_1+1$, $a_3 = 2p_1p_2+1$, $a_4 = 2p_1p_2p_3+1, \dots$

$a_k = 2p_1p_2p_3 \cdots p_{k-1}+1$

p_i, $1 \leq i \leq k-1$, i thjeshtë $p_i \neq 2$, p_i tek

$p_i = 2r+1$, $a_k = 2(2r+1)+1$

$a_k = 4r+3 \neq 4k, \neq 4k+1$, i cili nuk mund të jetë katror i një numri të plotë

2. Arsyetoni sa numra natyrorë ekzistojnë që ta kenë shumën e shifrave 2016 dhe prodhimin 2?

Meqë prodhimi i shifrave të numrit natyror është
2, atëherë të gjithë shifrat e tij duhet të jenë të bara-
barta me 1, përveç një shifre të vetme që është 2.
Meqë shuma e shifrave është 2016, kemi 2016 = 2 + 2014 =
1·2 + 2014·1. Meqë shuma e shifrave është 2016, shuma e një-
sheve është 2014. Pra numri ka 2015 shifra. Shifra 2
mund të zërë secilin nga 2015 vendet. Pra ekzistojnë
2015 numra natyrorë me kushtin më sipër.

3. Le të jetë dhënë trekëndëshi ABC i tillë që $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$ Tregoni që $\frac{1}{BC} + \frac{1}{CA} \geq \frac{2}{AB}$

Nga teorema e kosinusit kemi që: $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\frac{\pi}{3}$

$c^2 = a^2+b^2-2ab\cdot\frac{1}{2}$

$c^2 = a^2+b^2-ab$

Nga ana tjetër $(a-b)^2 \geq 0$

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \geq ab \Leftrightarrow c^2 \geq ab$

Kemi $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{4}{ab}$ sepse $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq 2/\sqrt{ab} \Rightarrow 4/ab \leq \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2 \Rightarrow$

$ab \geq \frac{4}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2}$, $c^2 \geq ab \Rightarrow$ $\left| \begin{array}{l} c^2 \geq \frac{4}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2} \\ c \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \end{array} \right.$ $\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{2}{c}$

4. Vërtetoni që, në qoftë se këndet në kulmin S të katërfaqëshit SABC janë të drejta, atëhere: $S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta SAB} + S^2_{\Delta SBC} + S^2_{\Delta SAC}$

Zgjidhje

$SC \perp SA \wedge SC \perp SB \Rightarrow SC \perp (ABC) \Rightarrow SC \perp AB$ (1)

$AB \perp SC$

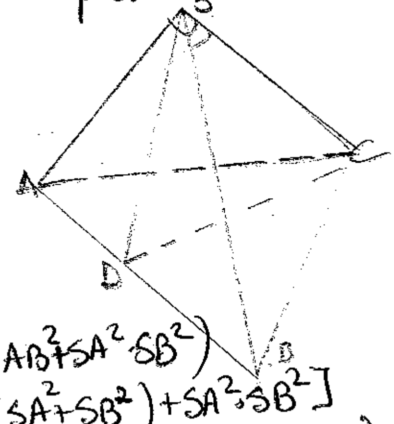
$AB \perp CD$ (2)

$AB \perp SCD$

Le të jetë SD lartësi e ΔSAB, $A\hat{S}B = 90^\circ \Rightarrow CD$, lartësi e ΔABC sepse (1),(2)

Kemi $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}SA\cdot SB = \frac{1}{2}AB\cdot SD \Rightarrow SD = \frac{SA\cdot SB}{AB}$ (3)

Në ΔSCD, $\measuredangle D\hat{S}C = 90^\circ$ sepse $\left| \begin{array}{l} CS \perp SA \\ CS \perp SB \end{array} \right.$ pingule me dy prerëse të planit



$CD^2 = SC^2 + SD^2$ (T.P) (4)

$AB^2 = SA^2 + SB^2$ në ΔASB, $\hat{S} = 90^\circ$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot CD \Rightarrow S^2 = \frac{1}{4}\cdot AB^2\cdot CD^2$

$S^2_{\Delta ABC} = \frac{1}{4}\cdot AB^2\left(SC^2 + \frac{SA^2\cdot SB^2}{AB^2}\right)$

Nga (3) dhe (4)

$= \frac{1}{4}AB^2\left(\frac{SC^2\cdot AB^2+SA^2\cdot SB^2}{AB^2}\right) = \frac{1}{4}(SC^2\cdot AB^2+SA^2\cdot SB^2)$

$= \frac{1}{4}[SC^2(SA^2+SB^2)+SA^2\cdot SB^2]$

$= \frac{1}{4}(SA^2\cdot SC^2+SC^2\cdot SB^2+SA^2\cdot SB^2)$

$= \frac{1}{4}\cdot SA^2\cdot SB^2 + \frac{1}{4}\cdot SB^2\cdot SC^2 + \frac{1}{4}\cdot SA^2\cdot SC^2$

$= S^2_{\Delta ASB} + S^2_{\Delta SBC} + S^2_{\Delta SAC}$

5. Vërtetoni që funksioni $f:]-b, +\infty[\to \mathbb{R}$ ku $f(x) = \frac{a}{x+b}$, $a > 0$ plotëson kushtin:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

Zgjidhje

$f(x) = \frac{a}{x+b}$, $x \in]-b, +\infty[$

Le të jenë $x_1, x_2 \in]-b, +\infty[\Rightarrow$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{a}{\frac{x_1+x_2}{2}+b} = \frac{2a}{x_1+x_2+2b} = \frac{2a}{(x_1+b)(x_2+b)}$$

e mesme aritmetike $\frac{u_1+u_2}{2} \geq \sqrt{u_1 u_2}$

$$u_1+u_2 \geq 2\sqrt{u_1 \cdot u_2}$$

$$\frac{1}{u_1+u_2} \leq \frac{1}{2\sqrt{u_1 \cdot u_2}}$$

$$f(x) = \frac{2a}{(x_1+b)(x_2+b)} \leq \frac{2a}{2\sqrt{(x_1+b)(x_2+b)}} = \frac{a}{\sqrt{(x_1+b)(x_2+b)}}$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{a}{\sqrt{(x_1+b)(x_2+b)}} = \sqrt{\frac{a^2}{(x_1+b)(x_2+b)}} \quad (\text{kur } a>0)$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \sqrt{\frac{a}{x_1+b} \cdot \frac{a}{x_2+b}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_1+b} + \frac{a}{x_2+b}\right)$$

REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
DHE SPORTIT
AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS

Viti mësimor 2015-2016 **Faza e dytë** **Klasa 12**

Olimpiada fillon në orën 10.00 dhe mbaron në orën 13.00.

1. Tregoni që për cdo $k \in N$
$49^k - 2352k - 1$ plotëpjestohet me 2304.

$\boxed{x^k - 1 = (x-1)(x^{k-1} + x^{k-2} + \ldots + x + 1)}$

Zgjidhje
Kemi që $49 = 48 + 1$, $2352 = 7^2 \cdot 48$ dhe $2304 = 48^2$
Të tregojmë $48^2 \mid 49^k - 49 \cdot 48k - 1$
Shënojmë $49 = n$, $48 = 49 - 1 = n - 1$
Të tregojmë që $n^2 \mid n^k - n(n-1) \cdot k - 1$.
$n^k - n(n-1) \cdot k - 1 = (n^k - 1) - n(n-1) \cdot k$
$= (n-1)(n^{k-1} + n^{k-2} + \ldots + n + 1) - n(n-1) \cdot k$ (1)
$= (n-1)(n^{k-1} + n^{k-2} + \ldots + n + 1 - nk)$
Për $n = 1 \Rightarrow n^{k-1} + n^{k-2} + \ldots + n + 1 - nk = 0$
pra $n^{k-1} + n^{k-2} + \ldots + n + 1 - nk \vdots n - 1$
Pra $n^{k-1} + n^{k-2} + \ldots + n + 1 - nk = (n-1) \cdot q(n)$
$n^k - n(n-1) \cdot k - 1 = (n-1)(n^{k-1} + n^{k-2} + \ldots + n + 1 - nk)$
$= (n-1)(n-1) \cdot q(n)$
$= (n-1)^2 \cdot q(n)$

Pra $n - 1 = 48$
$n = 49$
$49^k - 49 \cdot 48^k - 1 \vdots 48^2$

2. Jepet $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)$
Shkruani ekuacionin e tangentes në pikën me abshisë $x = 0$.

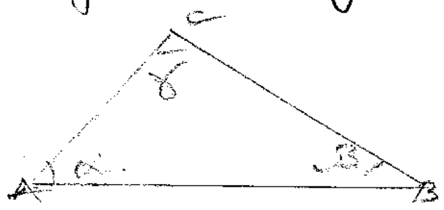
Zgjidhje
$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ $f(0) = 0$
$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x+1) \ldots (x+n) - 0}{x - 0}$
$= \lim_{x \to 0} \frac{x(x+1)(x+2) \ldots (x+n)}{x}$
$= \lim_{x \to 0} (x+1)(x+2) \ldots (x+n)$
$= 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$

$y - 0 = n!(x - 0)$
$\boxed{y = n! \cdot x}$

3. Tregoni në qoftë se α, β, γ janë kënde të një trekëndëshi, atëhere është i vërtetë mosbarazimi $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} < \frac{1}{8}$

Zgjidhje.

Le të jenë α, β, γ, kënde të një trekëndëshi çfarëdo. Shënojmë me $a = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$



$\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ \Rightarrow \alpha+\beta = 180^\circ - \gamma$

$\alpha + \beta/2 = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$

$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]$

$a = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right]\sin\frac{\gamma}{2}$

$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right)\right]\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$

$2a = \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} =$

$2a + \sin^2\frac{\gamma}{2} - \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\sin\frac{\gamma}{2} = 0$

$2a + x^2 - \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot x = 0$

$Ax^2 + Bx + C = 0$

Kemi $x = \sin\frac{\gamma}{2}$, rrënjë e $x^2 - \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)x + 2a \Rightarrow D \geq 0$

$A = 1$, $B = -\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$, $C = 2a$

$D = B^2 - 4AC$

$D = \cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - 8a \geq 0$

$8a \leq \cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \leq 1$

$8a \leq 1$

$a \leq \frac{1}{8}$

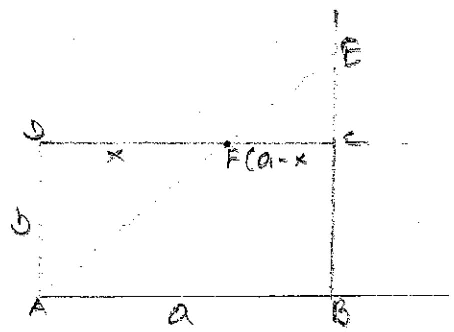
4. Nga kulmi A i drejtkëndëshit ABCD me përmasa AB= a dhe AD= b hiqet një drejtëz që e pret brinjën DC në pikën F dhe zgjatimin e BC në pikën E. Si duhet të hiqet drejtëza nga kulmi A në mënyrë që shuma $S = BE + DF$ të marrë vlerën më të vogël? Gjeni këtë vlerë.

Zgjidhje

Kemi $S = BE + DF$

$S = BC + CE + DF$

$DF = x \qquad FC = a - x$



$\Delta ECF \sim \Delta ADF$, $\hat{C} = 90^\circ$, $\hat{D} = 90^\circ$

$\frac{EC}{AD} = \frac{FC}{DF} \Rightarrow EC = \frac{AD\cdot FC}{DF} = \frac{b(a-x)}{x}$

$S = b + \frac{b(a-x)}{x} + x$

$S = x + \frac{ab}{x}$

$S' = 1 - \frac{ab}{x^2}$

$1 - \frac{ab}{x^2} = 0$

$x = \sqrt{ab}$

Për $x = \sqrt{ab}$ merret vlera më e vogël, pasi në]0, a[kemi vetëm një ekstremum, që është min => është vlera më e vogël.

$S = x + \frac{ab}{x}$

$S = \sqrt{ab} + \frac{ab}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow S = 2\sqrt{ab}$

Nqs $\sqrt{ab} > a$, $b > a \Rightarrow$ S është i zvogëluar në [0, a] dhe merr vlerën më të vogël për $x < a$.

5. Kutitë e një tabele me përmasa 15 X 15 lyhen përkatësisht me ngjyra të kuqe, blu dhe jeshile. Tregoni që ndodhen të paktën dy rreshta me numër të njëjtë kutish me ngjyra të njëjta.

Zgjidhje.
Supozojmë të kundërtën. Pra më çdo dy rreshta të ndryshëm, sasia e kutive me ngjyra të njëjta është i ndryshëm.
Kemi që sasia e kutive të kuqe është jo më pak se $0+1+\ldots+14=105$. Njësoj për kutitë blu $0+1+2+\ldots+13+14=105$
Njësoj për kutitë jeshile $0+1+2+\ldots+13+14=105$.
E gjithë tabela duhet të ketë jo më pak se $3 \cdot 105=315$ kuti, ku e gjithë tabela ka $15 \cdot 15=225$ kuti. Ky absurditet është rrjedhojë e supozimit të gabuar.