1. Vërtetoni se kur p dhe q janë numra tek, ekuacioni $x^2 + px + q = 0$ nuk ka rrënjë racionale.

Zgjidhje

Supozojmë të kundërtën:
Ekuacioni ka rrënjë racionale. Megë p është tek, atëherë p^2 është tek, dhe si rrjedhojë dallori $D = p^2 - 4q$ është tek, duke qënë katror i një numri tek.

$D = p^2 - 4q = (2m+1)^2$

Megë p, q janë tek, kemi:

$p = 2k+1$, $q = 2l+1$ dhe

$p^2 - 4q = (2k+1)^2 - 4(2l+1) = (2m+1)^2 \Rightarrow (2k+1)^2 - (2m+1)^2 = 4(2l+1)$

$[(2k+1) - (2m+1)]\,[(2k+1) + (2m+1)] =$

$(2k-2m)(2k+2m+2) = 4(2l+1) \Leftrightarrow$

$4(k+m+1)\cdot(k-m) = 4(2l+1)$ (✱)

Ana e majtë e barazimit (✱) është:

$4(k+m+1)\cdot(k-m)$ dhe $(k+m+1)+(k-m) = 2k+1$

Shuma është tek, kështu një prej mbledhorëve $k+m+1$ apo $k-m$ është çift pra $4(k+m+1)(k-m)$ plotpjesëtohet me 8, ndërsa ana e djathtë e barazimit (✱) është $4(2l+1) = 8l+4$, nuk plotpjesëtohet me 8.

Kjo kundërthënie, bie në kundërshtim me supozimin fillestar, pra ekuacioni nuk ka rrënjë racionale.

2. Nga qëndra e një trekëndëshi barabrinjës hiqet drejtëza paralele me bazën e trekëndëshit. Të vërtetohet që largësia nga baza e çdo pike M të segmentit të kësaj drejtëze, që kufizojnë brinjët e trekëndëshit është e mesmja aritmetike e largësive të pikës M nga dy brinjët anësore.

Zgjidhje

Le të jetë baza e $\triangle ABC$, $AB = a$, lartësia $CH = h$; H mesi i $[AB]$;

$(PQ) \parallel (AB)$

G është qëndra e trekëndëshit, pika pikëprerje e mesoreve

$CG : GH = 2:1$

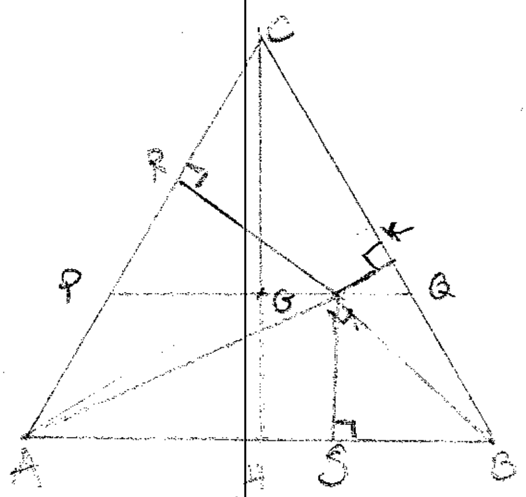
M është një pikë çfarëdo e PQ

Ndërtojmë

$[MK] \perp [CB]$

$[MS] \perp [AB]$

$[MR] \perp [AC]$



Bashkojmë M me A, B, C

$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle MAC} + S_{\triangle MBC} + S_{\triangle AMB}$

$\frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} a (MR + MK + MS)$

Pra, $h = MR + MK + MS$

$MS = GH = \frac{1}{3} h$

$h = MR + MK + \frac{1}{3} h$

$MR + MK = \frac{2}{3} h$

$\frac{MR + MK}{2} = \frac{h}{3} = MS$

Pra, $MS = \frac{MR + MK}{2}$

3. Vërtetoni mosbarazimin: $|x|+|y|+|z| \geq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ *për çdo* $x, y, z \in R$

Zgjidhje

Për $x^2+y^2+z^2=0 \Leftrightarrow x=y=z=0$ vëmë re se mosbarazimi është i vërtetë:

Për $x^2+y^2+z^2 \neq 0$

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{|x|^2+|y|^2+|z|^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{|x|^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{|y|^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{|z|^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$= |x| \cdot \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + |y| \cdot \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + |z| \cdot \frac{|z|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leq |x| \cdot 1 + |y| \cdot 1 + |z| \cdot 1 =$$

$$|x|+|y|+|z|$$

Pra $\forall x, y, z \in R$, kemi që $|x|+|y|+|z| \geq \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

4. Të zgjidhet inekuacioni: $\sqrt{x^2-1} > 2-x$

Zgjidhje

$\sqrt{x^2-1} > 2-x \Leftrightarrow$

$(1)\begin{cases} 2-x<0 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases}$ ose $(2)\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ (\sqrt{x^2-1})^2 > (2-x)^2 \end{cases}$

$C = A \cup B$, ku A është bashkësi e zgjidhjeve të sistemit (1); B është bashkësi e zgjidhjeve të sistemit (2).

$\begin{cases} 2-x<0 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ |x| \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow A =]2; +\infty[$

$\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ \sqrt{x^2-1} > 2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2-1 > (2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2-1 > 4-4x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x \leq 2 \\ 4x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 5/4 \end{cases} \Leftrightarrow B =]5/4; 2]$

$C = A \cup B$

$C =]2; +\infty[\cup]5/4; 2]$ prej, $C =]5/4; +\infty[$

5. Të vërtetohet që për çdo $n \in N$, shprehja $n^5 - n$ plotëpjestohet me 30.

Zgjidhje

Kemi $m^5 - m = m(m^4 - 1) = m(m^2 - 1)(m^2+1) = m(m-1)(m+1)\cdot(m^2+1) = (m-1)\cdot m(m+1)(m^2+1)$

Pra $m^5 - m = (m-1)\cdot m \cdot (m+1)\cdot(m^2+1)$

Kemi që tre faktorët e parë të këtij problemi janë tre numra natyrorë të njëpasnjëshëm, kështu që të paktën njëri prej tyre plotpjesëtohet me 2 dhe tjetri 3, kështu që prodhimi i tyre plotpjesëtohet me $2\cdot 3 = 6$

Të tregojmë që të paktën njëri nga katër faktoret e anës së djathtë plotpjesëtohet me 5.

Vërtetim

Pjesëtojmë m me 5, kemi rastet $m = 5\cdot k$ ose $m = 5\cdot k + 1$ ose $m = 5k + 2$ ose $m = 5\cdot k + 3$ ose $m = 5\cdot k + 4$

- Rasti $m = 5\cdot k \Rightarrow m \vdots 5 \Rightarrow m^5 - m \vdots 30$ (pasi $\vdots$ 6 dhe 5)
- Rasti $m = 5k+1$
  $m - 1 = 5k + 1 - 1 = 5k \Rightarrow m-1 \vdots 5 \Rightarrow m^5 - m \vdots 30$ (pasi $\vdots$ 6 dhe 5)
- Rasti $m = 5k + 2$
  $m^2+1 = (5k+2)^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 4 + 1 = 5(5k^2 + 4k + 1) \vdots 5 \Rightarrow$
  $m^5 - m \vdots 30$
- Rasti $m = 5k+3$
  $m^2 + 1 = (5k+3)^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 9 + 1 = 5(5k^2 + 6k + 2) \vdots 5 \Rightarrow m^5 - m \vdots 5$
- Rasti $m = 5k+4$
  $m+1 = 5k + 4 + 1 = 5(k+1) \vdots 5$

$\Rightarrow m^5 - m \vdots 5$ dhe $m^5 - m \vdots 6$

$\Rightarrow m^5 - m \vdots 30$

Pra $\forall m \in N \Rightarrow m^5 - m \vdots 30$