Zgjidhje 1

kemi që $(x+y)\cdot(f(x)-f(y)) = f(x^2) - f(y^2), \forall x, y \in R$

Duke zëvendësuar $y=0$ $\forall x \in R, y=0$ marrim

$x\cdot f(x) - x\cdot f(0) + f(0) = f(x^2)$ (1)

Duke zevendësuar $y=1$ kemi tek (*):

$xf(x) + f(x) - f(1)\cdot x = f(x^2)$ (2)

Duke zbritur nga (2) - (1)

$f(x) - f(1)\cdot x + x\cdot f(0) - f(0) = 0$

$x\cdot(f(0) - f(1)) - f(0) = -f(x)$

$f(x) = (f(1) - f(0))\cdot x + f(0)$

$\begin{cases} a = f(1) - f(0) \in R \\ b = f(0) \end{cases}$

$f(x) = ax + b$

$\forall x \in R$, $f$ është linear. Anasjelltas çdo $f$ linear plotëson kushtin e mësipërm.

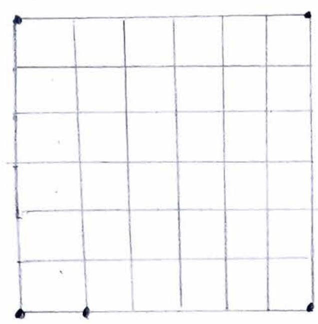
Zgjidhje 2

Shënojmë me $n_1$ numrin e katrorëve me brinjë një njësi që kanë brinjët paralele me brinjet e katrorit të dhënë me kulme në nyjet e rrjetës kemi $n_1 = n^2$

Kulmi i majtë i sipërm i katrorit të ligut të treguar me brinjë $a=2$ njësi mund të jetë në secilën nga $n-1$ rreshtat dhe shtyllat e para, pra kemi $(n-1)^2$ pozicione.

Kemi $n_2 = (n-1)^2$ katrorë me brinjë $a=2$ njësi.

Njëlloj për katrorë me brinjë $a=3$ njësi kemi:



$n_3 = (n-2)^2$

.....

$n_k = [n-(k-1)]^2$

....

$n_n = 1 = 1^2$

Pra numri i katrorëve të mundshëm është:

$n_1 + n_2 + \dots + n_k + \dots + n_n =$

$= n^2 + (n+1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 =$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ → tregohet me induksion matematik.

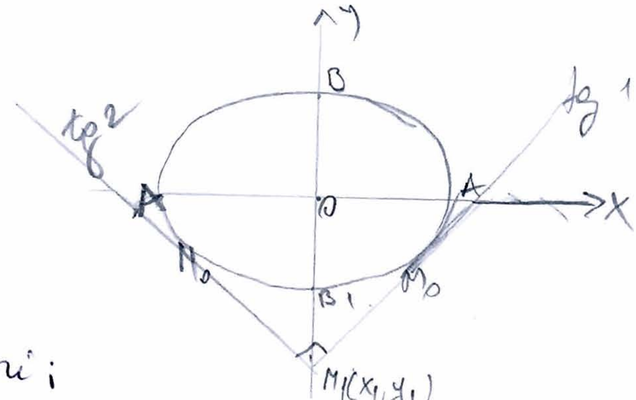
## Zgjidhje 3

Le të jetë $M_1(x_1, y_1)$ një pikë çfarëdo që ploteson kushtin e ushtrimit të mësipërm.

Kushti i tg: $a^2k^2+b^2=t^2$

Kemi dy tangente të hequra

$k \cdot tg_1 \cdot k \cdot tg_2 = -1 \quad , k_1 \cdot k_2 = -1$




Ek. i tg. $y - y_1 = k \cdot (x - x_1)$

$y = k \cdot x + (y_1 - k \cdot x_1)$

Kushti i tg : $a^2 \cdot k^2 + b^2 = t^2$: Kemi;

$a^2 \cdot k^2 + b^2 = (y_1 - k \cdot x_1)^2$.

$(a^2 - x_1^2) \cdot k^2 + 2x_1 \cdot y_1 \cdot k + (b^2 - y^2) = 0$

$k_1$, $k_2$ janë koeficentët këndorë të tangenteve të hequra nga $M_1(x_1, y_1)$ e boshkësive të k,

$$k_1 \cdot k_2 = \frac{c}{A} = \frac{b^2 - y_1^2}{a^2 - x_1^2} = -1 \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = a^2 + b^2$$

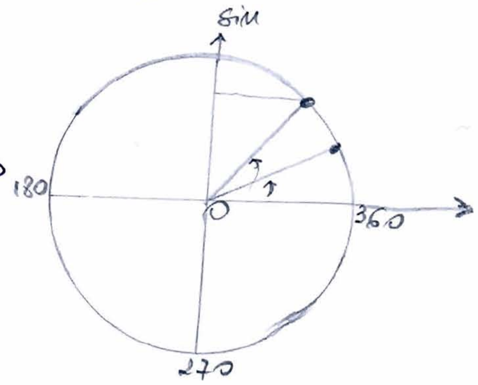
$\Leftrightarrow M_1(x_1, y_1) \in$ rreth $O(a\,0)$ $r = \sqrt{a^2+b^2}$

## Zgjidhje 4

Ekuacioni nuk ka zgjidhje pasi $x \in ]0, 90°[ \Rightarrow y = \sin x$ është rritës.

$42° > 30° \Rightarrow \sin 42° > \sin 30° = \frac{1}{2}$

$\sin x = 2 \sin 42° > 2 \sin 30° = 2 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow$




$\sin x > 1$ ?! Sepse $-1 \leq \sin x \leq 1$

$A = \emptyset$

Zgjidhje 5

$B(4;14)$

$P = ?$

Nga vetia e përgjysmores së këndit të brendshëm kemi që

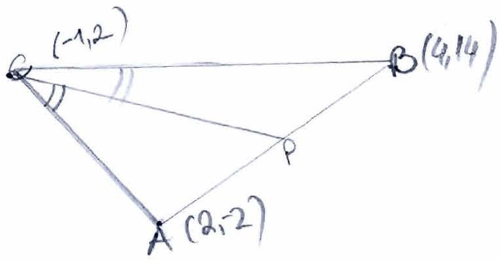
$$\frac{AP}{PB} = \frac{AC}{BC} = k$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-1-2)^2 + (2+2)^2} = 5$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-1-4)^2 + (2-14)^2} = \sqrt{25+144} = 13$$

Prej $\frac{AP}{PB} = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{13}$, $\boxed{k = \frac{5}{13}}$

$$\vec{AP} = k \cdot \vec{PB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_P - x_A \\ y_P - y_A \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x_B - x_P \\ y_B - y_P \end{pmatrix}$$




$$\begin{cases} x_P - x_A = k \cdot (x_B - x_P) \\ y_P - y_A = k \cdot (y_B - y_P) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_P = \dfrac{x_A + k \cdot x_B}{1+k} \\ y_P = \dfrac{y_A + k \cdot y_B}{1+k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = \dfrac{2 + \frac{5}{13} \cdot 4}{1 + 5/13} = \dfrac{46/13}{18/13} = 23/9 \\ y_P = \dfrac{-2 + 5/13 \cdot 4}{1 + 5/13} = \dfrac{44/13}{18/13} = 22/9 \end{cases}$$

$P\left(23/9 , 22/9\right)$.

Shënim: Çdo zgjidhje e dhënë nga nxënesit, që është e saktë shkencërisht merret parasysh dhe vlerësohet nga komisioni.