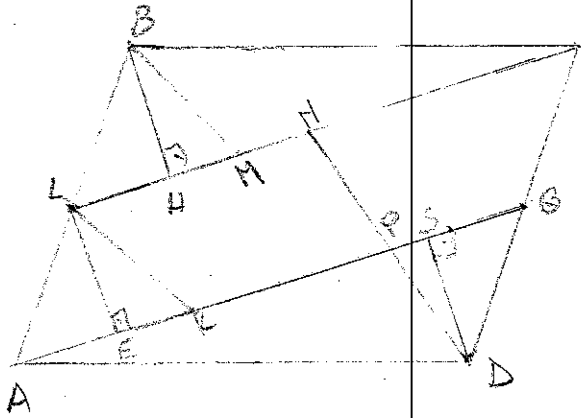
1. Jepet *ABCD* paralelogram. Kulmi *C* i paralelogramit bashkohet me mesin *L* të brinjës *AB*. Në segmentin [*LC*] merren pikat *M* dhe *N* të tilla që, segmentet [*BM*] dhe [*DN*] janë paralele (ku *M* ndodhet midis *L* dhe *N*). Gjeni raportin e sipërfaqes së shumëkëndëshit *ABMND* dhe trekëndëshit *BMC*.

Zgjidhje



Ndërtojmë [AQ] // [LC] => Q mesi i [CD]

Shënojmë P, pikëprerjen e [DN] me [AQ]

Nga L ndërtojmë [LR] // [NP]

Vëme re se largesat e B nga [LC], L nga [AQ], D nga [AQ] janë të njëjta, i shënojmë me h.

$BH = LE = DS = h$.

Shënojmë $LM = x$, $MN = y$. Kemi $RP = LN = x+y$; $AR = x = LM$;

$AP = AR + RP = x + x + y = 2x + y$

$S_{ABMND} = S_{\triangle LMB} + S_{ALNP} + S_{\triangle APD} = \frac{1}{2} LM \cdot h + \frac{1}{2}(AP + LN)\cdot h + \frac{1}{2} AP \cdot h =$

$\frac{1}{2} \cdot x \cdot h + \frac{1}{2}[(2x+y) + (x+y)] \cdot h + \frac{1}{2}(2x+y)\cdot h = \frac{3}{2}(2x+y)\cdot h$

Pra, $S_{ABMND} = \frac{3}{2}(2x+y)\cdot h$

Meqë [PQ] vijë e mesme e $\triangle NDC$, kemi $PQ = \frac{1}{2} NC$ ose $NC = 2PQ = 2x$, $MN = y$

Kemi $MC = y + 2x = 2x + y$ ($MC = MN + NC$)

$S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} MC \cdot BH = \frac{1}{2}(2x+y)\cdot h$

Kemi $S_{ABMND} = \frac{3}{2}\cdot(2x+y)\cdot h$

$S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2}(2x+y)\cdot h$

$S_{ABMND} : S_{\triangle BMC} = 3 : 1$

2. Le të jenë dhënë numrat realë pozitivë x_i, $1 \le i \le 4$, të tillë që $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 1$

Tregoni që: $\sum_{i=1}^{4} x_i^3 \ge \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i}$

Zgjidhje

Shënojmë me $S = \sum_{i=1}^{4} x_i^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$ dhe

$S_1 = S - x_1^3 = x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$

$S_2 = S - x_2^3 = x_1^3 + x_3^3 + x_4^3$

$S_3 = S - x_3^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_4^3$

$S_4 = S - x_4^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$

Nga barazimet më sipër kemi:

$\sum_{i=1}^{4} S_i = 3S$ prej nga $S = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{4} S_i$

Zbatojmë vetinë MA - MGJ

$\frac{1}{3} S_1 = \frac{1}{3}(x_2^3 + x_3^3 + x_4^3) \ge \sqrt[3]{x_2^3 \cdot x_3^3 \cdot x_4^3} = x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{1}{x_1}$ (pasi $x_1 x_2 x_3 x_4 = 1$)

Pra njëlloj

$$\begin{cases} \frac{1}{3} S_1 \ge \frac{1}{x_1} \\ \frac{1}{3} S_2 \ge \frac{1}{x_2} \\ \frac{1}{3} S_3 \ge \frac{1}{x_3} \\ \frac{1}{3} S_4 \ge \frac{1}{x_4} \end{cases} \Rightarrow$$

Mbledhim anë për anë

$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^{4} S_i \ge \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i}$ pra $S \ge \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i}$ ose

$\sum_{i=1}^{4} x_i^3 \ge \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{x_i}$

3. Jepet vargu (a_n) $n \in N$ në mënyrë rekurente $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{[a_n]}$, $n \in N$ ku $[a_n]$ është pjesa e plotë e a_n. Për ç'vlera të *n-së* kemi $a_n > 20$?

Zgjidhje

Shikojmë më fillim kufizat e para

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 2 + \frac{1}{2}$, $a_4 = 3$, $a_5 = 3 + \frac{1}{3}$, $a_6 = 3 + \frac{2}{3}$; $a_7 = 4$, $a_8 = 4 + \frac{1}{4}$

Vëmë re se kufizat e vargut kanë trajtën $m + \frac{k}{m}$ ku $0 \le k \le m - 1$, $m \in N$, kështu që për $m = 1$, kemi $a_1 = 1$.

Nëse $a_n = m + \frac{k}{m}$, ku $[a_n] = m$, kemi që $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{[a_n]} = m + \frac{k}{m} + \frac{1}{m} = m + \frac{(k+1)}{m}$

Kemi që $a_{n+1} = m + 1$, për $k = m - 1$

$a_{n+1} = m + \frac{k}{m}$ për $k < m - 1$

Nga më sipër kemi:

Një kufizë me pjesë të plotë 1

Dy kufiza me pjesë të plotë 2

Tre kufiza me pjesë të plotë 3

...

19 kufiza me pjesë të plotë 19

pra $1 + 2 + 3 + \ldots + 19 = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190$ kufiza

$a_{191} = 20$ dhe $a_n > 20$ për $n > 191$

4. Provoni që prej çdo 8 numrave të plotë pozitivë mund të zgjidhen dy prej tyre në mënyrë që diferenca e tyre të plotëpjestohet me 7.

Zgjidhje

Mbështetemi në 1) parimin Dirichle sipas të cilit:
" në qoftë se më shume se n elemente ndahen në n grupe, atëherë të paktën një prej grupeve ka të paktën dy elemente"
Dhe në 2) pohimin " në qoftë se dy numra natyrorë kanë të njëjtën mbetje gjatë pjesëtimit me një numër $a \in N$, atëherë diferenca e tyre plotpjesëtohet me a"

Marrim numrat e çfarëdoshëm natyrorë $a_1, a_2, \dots, a_8$. Duke i pjesëtuar çdo me x, fitohen mbetjet e tyre që i shënojmë $b_1, b_2, \dots b_8$. Pjesëtonu me 7 jep mbetjet $0, 1, 2, \dots, 6$, gjithsej 7 vlera të ndryshme.
Nga parimi Dirichle, rrjedh se ndër mbetjet $b_1, b_2, \dots, b_8$ ka të paktën dy të njëjta prej nga numrat që kanë mbetje të njëjtë gjatë pjesëtimit me 7, plotësojnë kushtet e problemit.

5. Të vërtetohet se për çdo $x > 2$ është i vërtetë mosbarazimi: $\sin\frac{\pi}{x} > \frac{3}{\sqrt{x^2+9}}$

Zgjidhje

Kemi që për $x > 2 \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{x} < \frac{\pi}{2}$ prej nga për vlerat e tg kemi:

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{x} > \frac{\pi}{x} > \frac{3}{x}$, dimë që $\cos^2\frac{\pi}{x} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{x}}$

Prej nga, meqë $0 < \frac{3}{x} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{x}$, marrim

$\cos^2\frac{\pi}{x} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{x}} < \frac{1}{1+\left(\frac{3}{x}\right)^2}$

Kemi $\sin^2\frac{\pi}{x} = 1 - \cos^2\frac{\pi}{x} > 1 - \frac{1}{1+\left(\frac{3}{x}\right)^2} = 1 - \frac{x^2}{x^2+9} = \frac{9}{x^2+9}$

Pra $\sin^2\frac{\pi}{x} > \frac{9}{x^2+9} > 0$

Pra meqë $\frac{\pi}{x} \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin\frac{\pi}{x} > \frac{3}{\sqrt{x^2+4}}$

$\frac{\pi}{x} \in K_1$

$\sin\frac{\pi}{x} > \frac{3}{\sqrt{x^2+9}}$