REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
DHE SPORTIT
AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

OLIMPIADA KOMBËTARE E MATEMATIKËS - KLASA E 9-TË

Faza e tretë

Viti mësimor 2015-2016 **13 shtator 2016**

Udhëzime për nxënësin

- Olimpiada fillon në orën 10.00 dhe mbaron në orën 13.00.
- Teza përmban 5 pyetje.
- Secila pyetje vlerësohet me 10 pikë.
- Për secilën pyetje është dhënë hapësira e nevojshme për të shkruar përgjigjen.
- Dy faqet e fundit mund të përdoren për llogaritje dhe veprime të tjera.
- Llogaritjet dhe veprimet e kryera në dy faqet e fundit nuk do të vlerësohen nga komisioni i vlerësimit.

Për përdorim nga komisioni i vlerësimit

Pyetja	1	2	3	4	5
	10 pikë	10 pikë	10 pikë	10 pikë	10 pikë
Pikët e fituara					

Totali i pikëve të fituara

KOMISIONI I VLERËSIMIT

1.. 2. ....

1. Tregoni që numri $4^{545}+545^4$ është i përbërë. **10 pikë**

Zgjidhje

$$4^{545}+545^4=(2^2)^{546}+[(545)^2]^2=$$

$$=(2^2)^{545}+2\cdot2^{245}\cdot 546^2+[(546)^2]^2-2\cdot2^{545}\cdot545^2$$

$$=(2^{546}+546^2)^2-2^{546}\cdot646^2=$$

$$=(2^{545}+545^2)^2-(2^{273}\cdot545)^2$$

$$=(2^{545}+545^2-2^{273}\cdot545)\cdot(2^{546}+545^2+2^{273}\cdot545)$$

$a=b\cdot c \qquad b,c\in Z$

$a=4^{545}+545^4$ është numër i përbërë

2. Le të jenë dhënë numrat x, y, z të ndryshëm nga zero, të tillë që $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=1$ **10 pikë**

Tregoni që: $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=0$.

Zgjidhje

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{y+x}=1 \overset{x\neq 0}{\Rightarrow} \frac{x^2}{y+z}+\frac{xy}{z+x}+\frac{xz}{x+y}=x \quad (1)$$

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=1 \overset{y\neq 0}{\Rightarrow} \frac{xy}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{yz}{x+y}=y \quad (2)$$

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=1 \overset{z\neq 0}{\Rightarrow} \frac{xz}{y+z}+\frac{yz}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=z \quad (3)$$

Mbledhim anë për anë (1), (2), (3) marrim:

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}+\overbrace{\left(\frac{xy}{y+z}+\frac{xz}{y+z}\right)}^{=x}+\overbrace{\left(\frac{xy}{z+x}+\frac{yz}{z+x}\right)}^{=y}+\overbrace{\left(\frac{xz}{x+y}+\frac{zy}{x+y}\right)}^{=z}=$$

$$x+y+z$$

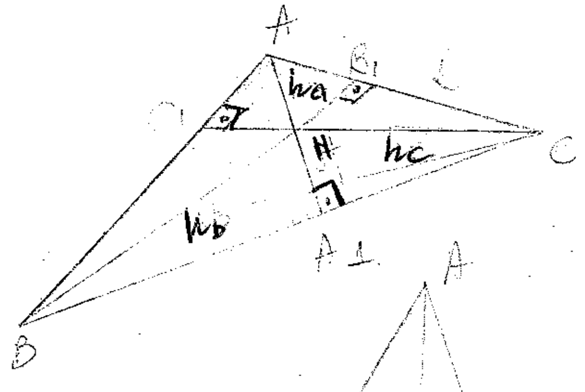
$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}+x+y+z=x+y+z \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=0$$

3. Dy lartësi të një trekëndëshi janë përkatësisht 10 njësi dhe 6 njësi. Tregoni që lartësia e tretë x plotëson kushtin $\frac{15}{4} < x < 15$. **10 pikë**

Zgjidhje

Le të jenë a, b, c, brinjët e $\triangle ABC$ dhe h_a, h_b, h_c, lartësitë përkatëse, S, syprina e tij.



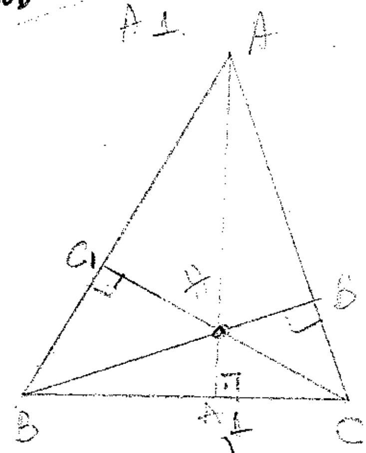
$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} \Rightarrow$

$a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c = 2 \cdot S$

$h_a = 10, \quad h_b = 6$

$a \cdot h_a = c \cdot h_c$

$\frac{c}{a} = \frac{h_a}{h_c}$



$h_a = 10, \quad h_b = 6$

$10a = 6b = 2h_c = 2S$

$b = \frac{10}{6} a = \frac{5}{3} a$

Nga vetitë e brinjëve të trekëndëshit.

$b - a < c < b + a$

$\frac{5}{3} a - a < c < \frac{5}{3} a + a$

$\frac{2}{3} a < c < \frac{8}{3} a$

$\Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{c}{a} < \frac{8}{3} \Rightarrow \frac{3}{8} < \frac{a}{c} < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{8} < \frac{h_c}{h_a} < \frac{3}{2}, \; (h_a = 10) \Rightarrow \frac{3}{8} < \frac{h_c}{10} < \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \frac{30}{8} < h_c \leq \frac{30}{2} \Rightarrow \frac{15}{4} < x < 15.$

4. Vërtetoni nëse a, b, c janë numra jonegativë, atëherë $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ **10 pikë**

Zgjidhje

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$\frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac} \quad \Rightarrow \quad (a+b)(a+c)(b+c) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2}$$

$$\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc} \qquad (a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$$

5. Përcaktoni (m, n), $m \in N, n \in N$ të cilat plotësojnë barazimin: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn} = \frac{2}{5}$. **10 pikë**

Zgjidhje

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{m \cdot n}$$

Rasti $m \leq n$

$$m \leq n \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{m \cdot n} \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{m} - \frac{1}{m \cdot n} < \frac{2}{m}$$

$\frac{2}{5} < \frac{2}{m} \Rightarrow m < 5$, thyesë me e madhe, kanë numërues të njëjtë, => ka emërues më të vogël.

Nga ana tjetër

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{m \cdot n} > \frac{1}{m} \Rightarrow \frac{2}{5} > \frac{1}{m} \Rightarrow m > \frac{5}{2} \Rightarrow m \geq 3$$

$3 \leq m < 5$, $m \in N$

Pra për $m = 3$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{n} - \frac{1}{3n} = \frac{2}{5} \Rightarrow n = 10$$

për $m = 4$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{n} - \frac{1}{4n} = \frac{2}{5} \Rightarrow n = 5$$

$(3, 10)$ $(4, 5)$

Për $n \leq m$

$(10, 3)$, $(5, 4)$

Pra kemi $\{(3, 10), (4, 5), (10, 3), (5, 4)\}$