



REPUBLIKA E SHQIPËRISË  
 MINISTRIA E ARSIMIT  
 DHE SPORTIT  
 QENDRA E SHËRBIMEVE ARSIMORE

## PROVIMI I MATURËS SHTETËRORE 2017

### SESIONI I

### VARIANTI A

E premte, 23 qershor 2017

Ora 10.00

Lënda: MATEMATIKË E THELLUAR

### ZGJIDHJE

#### 1. Përgjigjet për pyetjet 1-10.

Pyetja	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Alternativa e sakte	D	A	A	C	B	C	B	C	A	D

#### 2. Një mënyrë zgjidhje për pyetjet 11-20

11.

2 pikë

Meqë  $75\% + 35\% = 110\%$  del se 4 nxënës që mësojnë dy lëndë përbëjnë 10% të të gjithë nxënësve.

Rrjedhimisht klasa ka 40 nxënës. Prej tyre mësojnë fizikë  $\frac{35}{100} \cdot 40 = 14$  nxënës.

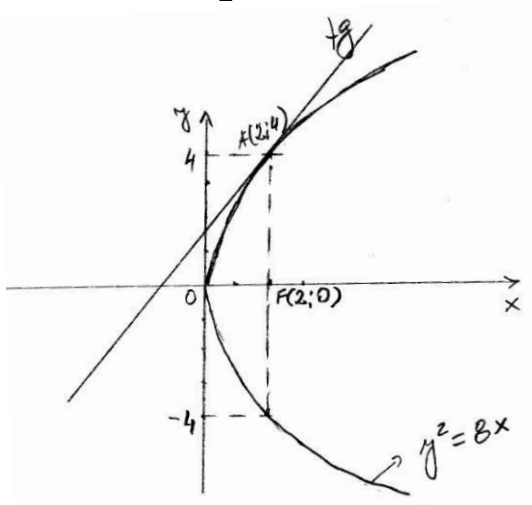
Përgjigje: Meqë 4 prej tyre mësojnë fizikë dhe ekonomi del që 10 nxënës mësojnë vetëm fizikë.

12.

a) 1 pikë

Parabola është e trajtës  $y^2 = 2px$  (simetrike me boshtin OX). Atëhere  $2p = 8 \Rightarrow p = 4$

Vatra e saj është  $F(\frac{p}{2}; 0)$  pra  $F(2; 0)$ .



b) 2 pikë

Pika e parabolës me ordinatë 4 e ka abshisën  $x=2$  sepse  $4^2 = 8x \Rightarrow x = 2$ .

Tangjentja është hequr në pikën  $A(2;4)$  të parabolës prandaj ekuacioni i saj është:

$$y \cdot y_1 = p(x + x_1)$$

$$y \cdot 4 = 4(x + 2)$$

$$y = x + 2$$

13. 3 pikë

a) Monotoninë e funksionit e studiojmë në bashkësinë e tij të përcaktimit, pra në  $]0; +\infty[$ .

Për të studiuar monotoninë e funksionit, studiojmë shenjën e derivatit të parë.

$$y'(x) = 1 - (1 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x) = 1 - (\ln x + 1) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$$

Studiojmë shenjën e  $y'$  duke patur parasysh grafikun e

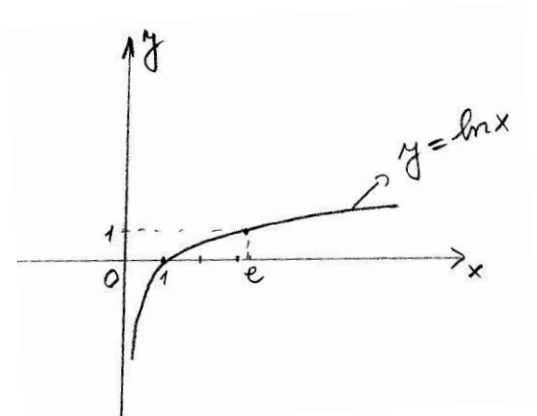
funksionit  $y = \ln x$ .

$$y'(x) = 0 \Rightarrow -\ln x = 0$$

$$\ln x = 0$$

$$x = 1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$y' = -\ln x$	/	/	+	-
y			max	



Në intervalin  $]0; 1[$  funksioni është rritës.

Në intervalin  $]1; +\infty[$  funksioni është zbritës.

b) 2 pikë

Meqë funksioni i përcaktuar në  $]0; +\infty[$  është i vazhdueshëm dhe ka në të vetëm një ekstremum (max)

aty ai merr vlerën më të madhe. Vlera më e madhe e tij është:  $y_{\max} = f(1) = 1 - 1 \cdot \ln 1 = 1 - 1 \cdot 0 = 1$

14.

a) 2 pikë

$$z = 1 + i$$

Ky numër është dhënë në trajtën algjebrike:

$$z = a + b \cdot i \quad \text{ku } a = 1 \text{ dhe } b = 1$$

Trajta trigonometrike e numrit kompleks  $z$  është:

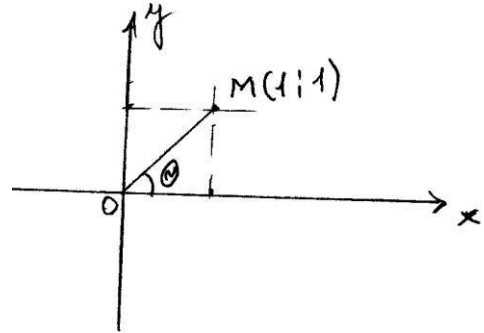
$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{ku } r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \theta = \arg(z)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\operatorname{tg} \theta = 1 \quad (\text{që ku } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ ose } \theta = \frac{3\pi}{4})$$

Meqë pika  $M(1;1)$  ndodhet në kuadrantin e parë kemi  $\arg z = \left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$\text{Pra, } z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$



b) 1 pikë

Nga formula e Muavrit dimë që:

$$z^n = r^n (\cos n \theta + i \sin n \theta)$$

$$z^{10} = (\sqrt{2})^{10} \left( \cos 10 \frac{\pi}{4} + i \sin 10 \frac{\pi}{4} \right)$$

$$z^{10} = 32 \left( \cos \frac{5\pi}{2} + i \sin \frac{5\pi}{2} \right)$$

15. 2 pikë

Heqim përgjysmoret AP dhe BF të këndeve të njëpasnjëshme të paralelogramit ABCD .

Ato priten në pikën E.

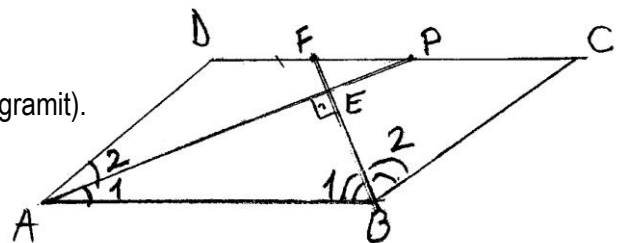
$$\text{Meqë AP përgjysmore} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

$$\text{Meqë BF përgjysmore} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2$$

Por,  $m(A) + m(B) = 180^\circ$  (si kënde të njëpasnjëshme të paralelogramit).

$$\text{Prandaj } m(A_1) + m(B_1) = 90^\circ \Rightarrow m(E) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

Pra, këto përgjysmore janë pingule.



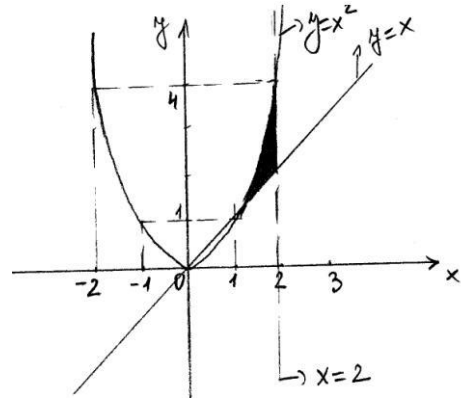
16.

3 pikë

Skicojmë grafikët e funksioneve mbi të njëjtin sistem koordinativ:

$f(x)=x^2$  parabolë me kulm  $O(0;0)$

$f(x)=x$  drejtëz përgjysmore e kuadrantit të parë dhe të tretë  
 $x=2$  drejtëz paralele me OY dhe kalon nga pika  $(2;0)$



Do të gjejmë syprinën e figurës së ngjyrosur.

$$S = \int_1^2 (x^2 - x) dx = \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \left( \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} \right) - \left( \frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} \right) = \frac{7}{3} - \frac{3}{2} = \frac{5}{6} \text{ njësi katrore.}$$

17.

3 pikë

$$y_1 = a \quad ; \quad q = \frac{1}{a}$$

Meqë progresioni është i pafundëm zbritës zbatojmë formulën:  $S = \frac{y_1}{1-q}$

$$\Rightarrow 4 = \frac{a}{1 - \frac{1}{a}} \Rightarrow 4\left(1 - \frac{1}{a}\right) = a$$

$$4 - \frac{4}{a} = a \quad \text{Shumëzojmë të dy anët e barazimit me } a \quad (a > 0).$$

$$4a - 4 = a^2$$

$$a^2 - 4a + 4 = 0 \Rightarrow (a - 2)^2 = 0 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

18.

3 pikë

$$\cos x + 2 = 2(1 - \cos^2 x)$$

$$\cos x + 2 = 2 - 2\cos^2 x$$

$$2\cos^2 x + \cos x = 0$$

$$\cos x(2\cos x + 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x_1 = 90^\circ ; x_2 = 270^\circ$$

$$2\cos x + 1 = 0$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_3 = 120^\circ ; x_4 = 240^\circ$$

Përgjigje: Në  $[0; 360^\circ]$  ky ekuacion ka bashkësi zgjidhjeje  $A = \{90^\circ, 120^\circ, 270^\circ, 240^\circ\}$

19.

a)

2 pikë

Meqë drejtëza pingule me planin  $\Rightarrow n = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$  është vektorë pingul me planin  $\alpha$ .

Prandaj ekuacioni i planit  $\alpha$  ka trajtën :

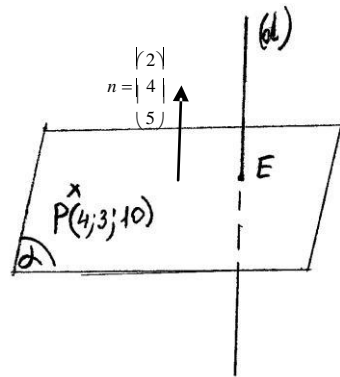
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$2(x - 4) + 4(y - 3) + 5(z - 10) = 0$$

$$2x - 8 + 4y - 12 + 5z - 50 = 0$$

$$2x + 4y + 5z - 70 = 0$$

Ekuacioni i planit  $\alpha$  është:  $2x + 4y + 5z - 70 = 0$



$$\begin{aligned} P &\in \alpha \\ (d) &\perp \alpha \\ E &= (d) \cap \alpha \end{aligned}$$

b)

2 pikë

E kthejmë ekuacionin e drejtëzës (d) në trajtën parametrike:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5} = t \Rightarrow \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 4t + 2 \\ z = 5t + 3 \end{cases}$$

Zëvendësojmë vlerat tek ekuacioni i planit  $\alpha$ .

$$2(2t + 1) + 4(4t + 2) + 5(5t + 3) - 70 = 0$$

$$4t + 2 + 16t + 8 + 25t + 15 - 70 = 0$$

$$45t = 45$$

$$t = 1 \Rightarrow x = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$y = 4 \cdot 1 + 2 = 6$$

$$z = 5 \cdot 1 + 3 = 8$$

Pra, pika e prerjes së drejtëzës (d) me planin  $\alpha$  është pika  $E(3; 6; 8)$ .

20.

2 pikë

Bashkësia e përcaktimit përbëhet nga ato vlera të ndryshores  $x$  për të cilat shprehja ka kuptim.

Atëhere:

$$\frac{1}{4} - 2^x \geq 0$$

$$2^{-2} \geq 2^x \text{ ose } 2^x \leq 2^{-2}$$

Meqë baza  $a > 1$  funksioni  $y = a^x$  është rritës, prandaj kemi:

$$x \leq -2$$

Pra, bashkësia e përcaktimit është  $E = ]-\infty; -2]$ .