

REPUBLIKA E SHQIPËRISË  
 MINISTRIA E ARSIMIT  
 DHE SPORTIT  
 AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

**PROVIMI ME ZGJEDHJE I MATURËS SHTETËRORE 2016**  
**SESIONI I**

**VARIANTI A**

E premte, 24 qershor 2016

Ora 10.00

**Lënda: Matematikë e thelluar**

**Udhëzime për nxënësin**

Testi në total ka 20 pyetje.

Në test ka kërkesa me zgjedhje dhe me zhvillim.

*Në kërkesat me zgjedhje rrethoni vetëm shkronjën përbri përgjigjes së saktë, ndërsa për kërkesat me zhvillim është dhënë hapësira e nevojshme për të shkruar përgjigjen.*

Pikët për secilën kërkesë janë dhënë përbri saj.

**Për përdorim nga komisioni i vlerësimit**

Kërkesa	1	2	3	4	5	6	7	8
Pikët								
Kërkesa	9	10	11	12	13	14	15a	15b
Pikët								
Kërkesa	16	17	18a	18b	19	20		
Pikët								

Totali i pikëve

**KOMISIONI I VLERËSIMIT**

1.....Anëtar

2.....Anëtar

Për pyetjet 1-10 rrethoni vetëm shkronjën që i përgjigjet alternativës së saktë.

1. Integrali i caktuar  $\int_1^2 2x^{-2} dx$  është i barabartë me: 1 pikë

- A) 3  
 B) 2  
 C) 1  
 D) 0

2. Jepet  $\frac{\cos x}{\sin x} = 2$ . Vlera e  $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{cotg} x}$  është: 1 pikë

- A) 2  
 B) 1  
 C) 0,5  
 D) 0,25

3. Vlera e shprehjes  $\log_3 6 + 3\log_3 2 - \log_3 16$  është: 1 pikë

- A) 0  
 B) 1  
 C) 2  
 D) 3

4. Vija me ekuacion  $y = e^{-2x}$  në pikën me abshisë  $x=0$  ka tangjente me koeficient këndor: 1 pikë

- A) 4  
 B) 2  
 C) 0  
 D) -2

5. Jepet numri kompleks  $z = i(2 - i)$ .  $\operatorname{Re}(z)$  është: 1 pikë

- A) -2  
 B) -1  
 C) 1  
 D) 2

6. Bashkësia  $A = \{x \in \mathbb{R} / x < -1 \text{ dhe } x > -2\}$  është: 1 pikë

- A)  $] -\infty, -1[$   
 B)  $] -\infty, -2[$   
 C)  $] -2, +\infty[$   
 D)  $] -2, -1[$

7. Jepet barazimi  $2^x \cdot 2^{-2} = 4$ . Vlera e  $x$  është: 1 pikë

- A) 2  
 B) 3  
 C) 4  
 D) 6

8. Katetet e një trekëndëshi kënddrejtë janë 5cm dhe 10cm. Brinja e katrorit që ka të njëjtën sipërfaqe me këtë trekëndësh, është:

1 pikë

- A) 9 cm  
 B) 7 cm  
 C) 5 cm  
 D) 3 cm

9. Grafiku i funksionit  $y=2 \cdot 3^{x+1}$  pret boshtin OY në pikën me ordinatë:

1 pikë

- A) 2  
 B) 3  
 C) 4  
 D) 6

10. Jepen  $f(x)=\sin x$  dhe  $g(x)=-\pi$ . Vlera e  $f(g(x))$  është:

1 pikë

- A) 1  
 B) 0  
 C) 0,5  
 D) -1

Pyetjet 11-20 janë me zhvillim dhe me arsyetim.

11. Vërtetoni që për funksionin  $f: y = \frac{4x}{1+x^2}$  vlera më e madhe është 2 dhe më e vogla është -2.

3 pikë

Të tregojmë që për  $\forall x \in \mathbb{R}$ :  $-2 \leq \frac{4x}{1+x^2} \leq 2$

meqë  $1+x^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  kemi  $\Leftrightarrow -2(1+x^2) \leq 4x \leq 2(1+x^2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2(1+x^2) \leq 4x \\ 4x \leq 2(1+x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq (x+1)^2 \\ 0 \leq (x-1)^2 \end{cases}$

Sistemi është i vërtetë për  $\forall x \in \mathbb{R}$ , sepse të dy inekuacionet vërtetohen  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

12. Të zgjidhet ekuacioni:  $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$

3 pikë

Ekuacioni shkruhet:

$$(3^2)^x - 10 \cdot 3^x + 9 = 0$$

$\Downarrow$

$$t^2 - 10t + 9 = 0$$

$$2t_1 = \frac{10 \pm 8}{2} \begin{cases} t_1 = 9 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

shinoj  $3^x = t$

$$(3^2)^x = 3^{2x} = (3^x)^2 = t^2$$

Për  $t_1 = 9$  për  $t_2 = 1$

$$3^x = 9$$

$$3^x = 3^2$$

$$\boxed{x = 2}$$

$$3^x = 1$$

$$3^x = 3^0$$

$$\boxed{x = 0}$$

Përgjigje: 5  $\{0, 2\}$

13. Gjeni syprinën e figurës së kufizuar nga grafikët e funksioneve  $y=|x|$ ;  $y=-x^2+2$ .

3 pikë

Ndëtojmë grafikun  $y=|x| = \begin{cases} x & \text{për } x \geq 0 \\ -x & \text{për } x < 0 \end{cases}$

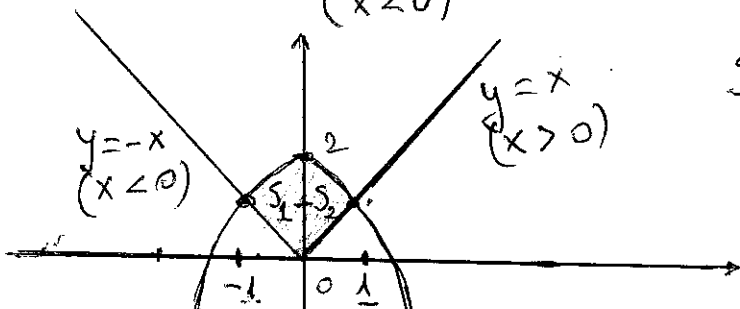
$y = -x^2 + 2$ , Grafiku paraqet një parabolë  $a = -1$  me degë poshtë.

$$C(0; 2) \quad \begin{array}{c|c|c|c} \text{vlx} & -1 & 0 & 1 \\ \hline y = -x^2 + 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

Grafiket priten

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = 1}$$



Shinoj  $S_1 = \int_{-1}^0 [-x^2 + 2 - (-x)] dx = \int_{-1}^0 (-x^2 + 2 + x) dx$

$$S_2 = \int_0^1 (-x^2 + 2 - x) dx$$

Pra kemi:

$$S = S_1 + S_2 = \int_{-1}^0 [-x^2 + 2 - (-x)] dx + \int_0^1 (-x^2 + 2 - x) dx =$$

$$S_1 = \int_{-1}^0 (-x^2 + 2 + x) dx = \left( -\frac{x^3}{3} + 2x + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 = 0 - \left( -\frac{1}{3} - 2 + \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{6}$$

$$S_2 = \frac{7}{6} \Rightarrow S = \frac{7}{3}$$

14. Të gjendet shuma e 20 kufizave të para të një progresioni aritmetik, duke ditur që  $a_2 + a_{19} = 198$ .

3 pikë

Dimë që  $S_m = \frac{(a_1 + a_m)m}{2}$  ku  $a_m$  progresion aritmetik  
 pra:  $S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20})20}{2}$ ;  $S_{20} = (a_1 + a_{20}) \cdot 10$

$$a_{20} = a_1 + 19d; \quad S_{20} = (2a_1 + 19d) \cdot 10$$

kemi të dhëna  $a_2 + a_{19} = 198 \Leftrightarrow a_1 + d + a_1 + 18d = 198$   
 $\Leftrightarrow \boxed{2a_1 + 19d = 198}$  që nga  $S_{20} = 198 \cdot 10 = 1980$ .

15. Jepet funksioni  $y = \frac{\sqrt{x}}{\log_3(x-1)}$

a) Gjeni  $f(4) = \frac{\sqrt{4}}{\log_3(4-1)} \Leftrightarrow f(4) = \frac{2}{\log_3 3}$  1 pikë

$$f(4) = \frac{2}{1} = 2$$

b) Gjeni bashkësinë e përcaktimit.

2 pikë

Bashkësia e përcaktimit gjendet nga zgjidhja e sistemit

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x-1 > 0 \\ \log(x-1) \neq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{x \geq 0}$$

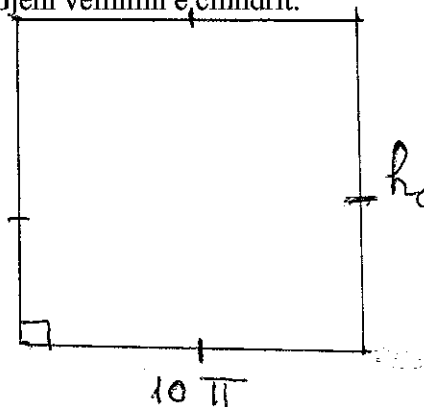
$$x-1 > 0 \Leftrightarrow \boxed{x > 1}$$

$$\log(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow \log(x-1) \neq \log 1 \Leftrightarrow x-1 \neq 1 \Leftrightarrow \boxed{x \neq 2}$$

$$P: x \in ]1; 2[ \cup ]2; +\infty[$$

16. "Hapja" e sipërfaqes së një cilindri rrethor të drejtë është katrori me brinjë  $10\pi$  cm. Gjeni vëllimin e cilindrit.

3 pikë



$$V_{\text{cilindrit}} = \pi R^2 h$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{\text{cilindrit}} = 10\pi \text{ cm} \\ \text{Perimetri i Bazes} = 10\pi \text{ cm} \end{array} \right.$$

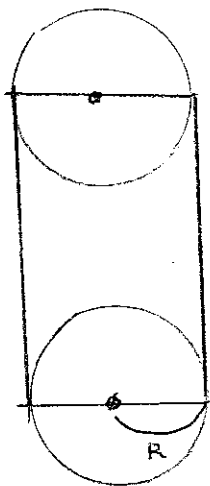
$$P = 2\pi R = 10\pi \Leftrightarrow$$

$$R = 5 \text{ cm}$$

$$R = 5 \text{ cm}$$

$$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 10\pi$$

$$V = 250\pi^2 \text{ cm}^3$$



17. Hidhet një zar dy herë. Pikët shënohen në një letër. Shënojmë me  $x$  rezultatin e parë dhe me  $y$  rezultatin e dytë. Gjeni probabilitetin e ngjarjes:  $|x-y|=2$

2 pikë

Hapsira e rezultateve:

$x_1$	$x_2$
6	6

$$n(E) = 36$$

$$\text{Ngjarja } A = \{(1,3), (3,1), (2,4), (4,2), (3,5), (5,3), (4,6), (6,4)\}$$

$$n(A) = 8$$

$$\text{dhe } p(A) = \frac{n(A)}{n(E)}$$

$$p(A) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

18. Jepen vektorët  $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ;  $\vec{AA_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

a) Gjeni vëllimin e paralelopipedit të ndërtuar mbi këta vektorë.

2 pikë

Dimë që  $V = |(\vec{AB} \times \vec{AD}) \cdot \vec{AA_1}|$   
 por  $(\vec{AB} \times \vec{AD}) \cdot \vec{AA_1} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -12$   
 $V = 12 \text{ nj}^3$

b) Gjeni lartësinë e hequr nga kulmi  $A_1$ .

Ndërtoj lartësinë e paralelopipedit nga kulmi  $A_1$   $A_1H = l$

Dimë që  $V = B \cdot l$

Ku  $B \rightarrow$  Syprina e  $ABCD$  dhe  $l = A_1H$

$$l = \frac{V}{B}$$

nga kuptimi gjeometrik i  $\vec{AB} \times \vec{AD}$  dimë që

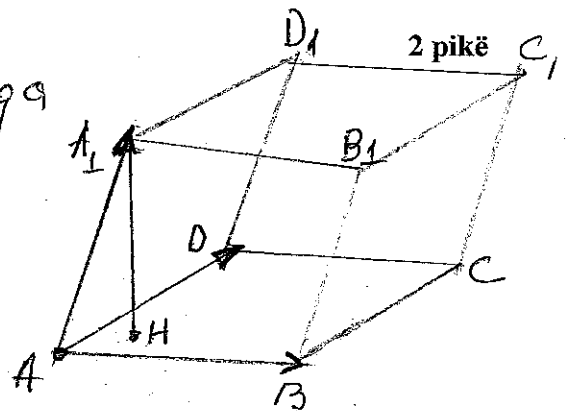
$$B = |\vec{AB} \times \vec{AD}|$$

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 4 & 2 \\ \vec{j} & 3 & 1 \\ \vec{k} & 0 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = 6\vec{i} - 8\vec{j} - 2\vec{k}; \quad \vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AD}| = \sqrt{36 + 64 + 4} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26} \text{ nj}^2 \text{ nga ku } B = 2\sqrt{26} \text{ nj}^2$$

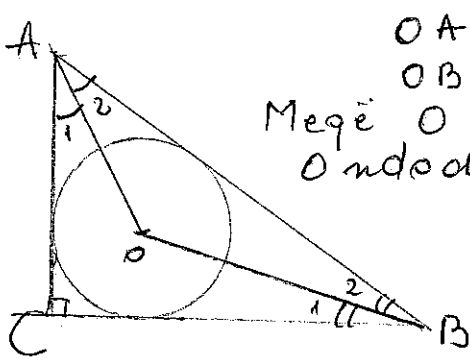
$$\text{dhe } l = \frac{12}{2\sqrt{26}} = \frac{6}{\sqrt{26}} = \frac{6\sqrt{26}}{26} = \frac{3\sqrt{26}}{13} \text{ nj.}$$



2 pikë

19. Qendra e rrethit të brendashkruar një trekëndëshi këndëdrejtë ka largesa  $\sqrt{5}$  cm dhe  $\sqrt{10}$  cm nga skajet e hipotenuzës. Gjeni gjatësinë e hipotenuzës.

3 pikë



$$OA = \sqrt{5} \text{ cm}$$

$$OB = \sqrt{10} \text{ cm}$$

Megjë O është qendër e rrethit të brendashkruar, O ndodhet në pikë prerjen e përgjyshoreve

$$\text{Megjë } \hat{C} = 90^\circ, \hat{A} + \hat{B} = 90^\circ$$

$$\hat{A}_2 + \hat{B}_2 = 45^\circ \text{ pra } \hat{AOB} = 135^\circ$$

Në  $\triangle AOB$  zbatoj teoremën e kosinusit

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \hat{AOB}$$

$$AB^2 = 5 + 10 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$AB^2 = 25 \Rightarrow AB = 5 \text{ cm.}$$

20. Jepet funksioni i përcaktuar në  $\mathbb{R}$  i tillë që  $f(x) = \begin{cases} kx+1 & \text{për } x \leq \pi \\ \cos x & \text{për } x > \pi \end{cases}$

Për ç'vlerë të koeficientit  $k$  funksioni është i vazhdueshëm në  $x = \pi$ ?

3 pikë

Nga përkufizimi i vazhdueshmërisë në pikë kemi që:  $(y = f(x) \text{ i vazhduar në } x = \pi) \Leftrightarrow \left( \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = f(\pi) \right)$

$$1) f(\pi) = k \cdot \pi + 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pi^-} kx + 1 = k\pi + 1 \\ \lim_{x \rightarrow \pi^+} \cos x = \cos \pi = -1 \end{cases}$$

(Që funksioni të ketë limit në  $x = \pi$ )  $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x)$

$$\text{pra } k\pi + 1 = -1 \Leftrightarrow k\pi = -2 \Leftrightarrow \boxed{k = -\frac{2}{\pi}}$$

$$\text{pra, për } k = -\frac{2}{\pi} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = -1}$$

$$③ f(\pi) = k\pi + 1 = -\frac{2}{\pi} \cdot \pi + 1 = -1$$

Pra për funksionin kemi  $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = f(\pi) \Leftrightarrow f$  i vazhduar në  $x = \pi$