



REPUBLIKA E SHQIPËRISË
 MINISTRIA E ARSIMIT
 DHE SPORTIT
 AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

PROVIMI I MATURËS SHTETËRORE 2016

I DETYRUAR

VARIANTI B

E premte, 17 qershor 2016

Ora 10.00

Lënda: MATEMATIKË (GJIMNAZI)

Udhëzime për nxënësin

Testi në total ka **25 pyetje**, 13 pyetje me zgjedhje (alternativa) dhe 12 pyetje me zhvillim.

Në pyetjet me zgjedhje rrethoni **vetëm** shkronjën përbri përgjigjes së saktë, ndërsa për pyetjet me zhvillim është dhënë hapësira e nevojshme për të shkruar përgjigjen.

Koha për zhvillimin e pyetjeve të testit është **2 orë e 30 minuta**.

Pikët për secilën kërkesë janë dhënë përbri saj.

Për përdorim nga komisioni i vlerësimit

Kërkesa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Pikët											
Kërkesa	12	13	14	15	16a	16b	17a	17b	18a	18b	19
Pikët											
Kërkesa	20	21a	21b	22a	22b	23	24	25a	25b		
Pikët											

Totali i pikëve

KOMISIONI I VLERËSIMIT

1.....Anëtar

2.Anëtar

Për pyetjet 1-13 rrethoni vetëm shkronjën që i përgjigjet alternativës së saktë.

1. Vlera e $\int_0^1 3e^x dx$ është:

1 pikë

- A) $3e$
 B) 2
 C) $3e-3$
 D) 0

2. Jepet funksioni $f(x)=2x^2-x+3$. Vlera e $f'(1)$ është:

1 pikë

- A) -3
 B) 3
 C) 4
 D) 5

3. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{25-x^2}{5-x}$ është:

1 pikë

- A) 10
 B) 5
 C) 0
 D) -10

4. Drejtëza $2x - 3y = 4$ pret boshtin OX në pikën me abshisë:

1 pikë

- A) -2
 B) 1
 C) 2
 D) 3

5. Cila nga fjalitë e mëposhtëme **NUK** është e vërtetë:

1 pikë

- A) dy trekëndësha kongruentë janë të ngjashëm
 B) dy trekëndësha barabrinjës janë të ngjashëm
 C) dy trekëndësha barabrinjës janë kongruentë
 D) dy trekëndësha kënddrejtë dybrinjshëm janë të ngjashëm

6. Drejtëzat $y = \frac{1}{3}x - 1$ dhe $y = mx + 2$ janë pingule. Vlera e m është:

1 pikë

- A) -3
 B) -2
 C) -1
 D) 3

7. Jepen funksionet $f(x)=x^2-4$ dhe $g(x)=2x$. $f \circ g(1)$ është:

1 pikë

- A) 0
 B) 1
 C) 2
 D) 4

8. Vlera më e madhe e funksionit $y=1-\sin x$ është:

1 pikë

- A) -1
- B) 0
- C) 1
- D) 2

9. Shprehja $\sqrt{a^2} + 2a$ për $a < 0$ është identike me:

1 pikë

- A) 0
- B) a
- C) 2a
- D) 3a

10. Gjatësia e vektorit $\vec{m} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$ është:

1 pikë

- A) 2
- B) 6
- C) 8
- D) 10

11. Vlera e shprehjes $2(\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ)$ është:

1 pikë

- A) 0
- B) 1
- C) $\sqrt{3}$
- D) 2

12. Jepen bashkësitë $A =]-1; 3[$ dhe $B = [0; 4[$. Elementi më i vogël i bashkësisë $A \cap B$ është:

1 pikë

- A) -1
- B) 0
- C) 3
- D) 4

13. Vlera e shprehjes $\frac{3^6 \cdot 3^{-3}}{9}$ është:

1 pikë

- A) 9
- B) 3
- C) 1
- D) 3^{-1}

Pyetjet 14-25 janë me zhvillim dhe me arsyetim.

14. Të zgjidhet ekuacioni $\ln x - \ln(2-x) = \ln 7$

3 pikë

Gjajmë mjedistim ku do të zgjidhet ky ekuacion:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 2-x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 2 \end{cases} \quad M_j =]0; 2[$$

$$\ln x - \ln(2-x) = \ln 7 \Leftrightarrow \ln \frac{x}{2-x} = \ln 7 \Leftrightarrow \frac{x}{2-x} = 7$$

$$\frac{x}{2-x} = 7$$

$$x = 7(2-x)$$

$$x = 14 - 7x$$

$$8x = 14 \Rightarrow x = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$$

Vëmë re se numri $\frac{7}{4} \in]0; 2[$

prandaj numri $\frac{7}{4}$ është zgjidhje.

15. Gjej pikën në grafikun e funksionit $y = 3x^2 - 2x^3$, ku tangentja ka koeficientin këndor më të madh.

3 pikë

Gjajmë pikën $M(x; y)$ në grafikun e $y = 3x^2 - 2x^3$ ku tangentja ka koeficientin këndor më të madh.

$$k_{tg} = f'(x) = 6x - 6x^2$$

Formojmë funksionin $k(x) = 6x - 6x^2$. Për këtë funksion

gjajmë ku ai men vlerën më të madhe në \mathbb{R} .

Studiojmë monotoninë e funksionit $k(x)$.

$$k'(x) = 6 - 12x \Rightarrow 6 - 12x = 0 \quad x = \frac{1}{2}$$

x	-x	$\frac{1}{2}$	+x
k'(x)	+	0	-
k(x)			

Megë funksioni $k(x)$ i vazhdueshëm në \mathbb{R} dhe ka në të vetëm një maksimum, aty ai men vlerën më të madhe.

$$\text{Për } x = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 3 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Përgjigje: Në pikën $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ koeficient këndor i tangentës ndaj grafikut të $y = f(x)$ ka vlerën më të madhe.

16. Jepen pikat $M(1;2)$ dhe $N(3;4)$ a) Gjeni ekuacionin e drejtëzës MN

1 pikë

$$(MN): \frac{x - x_M}{x_N - x_M} = \frac{y - y_M}{y_N - y_M}$$

$$\frac{x - 1}{3 - 1} = \frac{y - 2}{4 - 2}$$

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{2}$$

$$x - 1 = y - 2 \Rightarrow (MN): \boxed{x - y + 1 = 0}$$

b) Gjeni pikën K në boshtin OY e tillë që vektorët \vec{MK} dhe \vec{NK} të kenë gjatësi të barabartë.

2 pikë

Pika $K(0; y)$ meqë $K \in (OY)$

$$\vec{MK} = \begin{pmatrix} x_K - x_M \\ y_K - y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ y - 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{NK} = \begin{pmatrix} x_K - x_N \\ y_K - y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 3 \\ y - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ y - 4 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{MK}| = \sqrt{(-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{1 + (y-2)^2}$$

$$|\vec{NK}| = \sqrt{(-3)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{9 + (y-4)^2}$$

$$\sqrt{1 + (y-2)^2} = \sqrt{9 + (y-4)^2}$$

$$1 + y^2 - 4y + 4 = 9 + y^2 - 8y + 16$$

$$4y = 20$$

$$y = 5$$

Përgjigje: Pika e kërkuar është pika $K(0; 5)$

17. Jepet funksioni $y = \begin{cases} 3x^2 & \text{për } x \geq 0 \\ -x & \text{për } x < 0 \end{cases}$

a) Tregoni që funksioni është i vazhdueshëm në $x=0$.

2 pikë

Që funksioni të jetë i vazhdueshëm në $x=0$, duhet të plotësohen njëherazi 3 kushte:

1) të $\exists f(0) : f(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$

2) të $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ dom.th. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

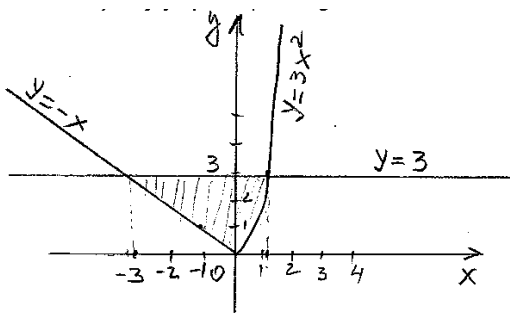
$\lim_{\substack{x \rightarrow 0^- \\ x < 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0 ; \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x^2 = 3 \cdot 0^2 = 0 \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \right.$

3) duhet që $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) : \text{shohim që } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$

Përfundim: Funksioni është i vazhdueshëm në $x=0$

b) Gjej sipërfaqen e figurës së kufizuar nga grafiku i këtij funksioni dhe drejtëza me ekuacion $y=3$.

3 pikë



a) Skicojmë grafikun e funksionit

për $x \geq 0, y = 3x^2$ (Parabolë)

x	0	1	2
y	0	3	12

për $x < 0, y = -x$ (Drejtëz)

x	-1	(0^-)
y	1	(0^+)

b) kufijtë:

- kufiri i majtë $\begin{cases} y = -x \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow -x = 3 \Rightarrow \boxed{x = -3}$ - kufiri i djathtë $\begin{cases} y = 3x^2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 3x^2 = 3 \\ x^2 = 1 \\ \boxed{x = 1} \end{matrix}$

c) $S = \int_{-3}^0 [3 - (-x)] dx + \int_0^1 (3 - 3x^2) dx =$

$= \int_{-3}^0 (3+x) dx + \int_0^1 (3-3x^2) dx = \left(3x + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-3}^0 + \left(3x - \frac{3x^3}{3} \right) \Big|_0^1 =$

$= 0 - \left(-9 + \frac{9}{2} \right) + (3-1) = 0 = 9 - \frac{9}{2} + 2 = 11 - \frac{9}{2} = \frac{22-9}{2} =$

$= \frac{13}{2} = 6,5$ njësi katrore.

18. Jepet funksioni $y = x^3 + 6x^2 - 1$
 a) Studioni monotoninë e funksionit.

2 pikë

Për të studiuar monotoninë e funksionit, studiojmë shenjën e derivatit të parë në $B_f = \mathbb{R}$.

$$y' = (x^3 + 6x^2 - 1)' = 3x^2 + 12x$$

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 12x = 0 \Rightarrow 3x(x + 4) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} 3x = 0 \\ x = 0 \end{matrix} \text{ ose } \begin{matrix} x + 4 = 0 \\ x = -4 \end{matrix}$$

x	-∞	-4	0	+∞	
y'	+	0	-	0	+
y		↗	↘	↗	
		max	min		

Për $x \in]-\infty; -4[$ $f(x)$ monoton rritës

Për $x \in]-4; 0[$ $f(x)$ monoton zbritës

Për $x \in]0; +\infty[$ $f(x)$ monoton rritës

b) Trego ekzistencën e rrënjës së ekuacionit $f(x) = 0$ në segmentin $[-2; 0]$.

2 pikë

Shqyrtojmë funksionin $f(x) = x^3 + 6x^2 - 1$ në segmentin $[-2; 0]$

Ky funksion është i vazhdueshëm në këtë segment (si polinom)

dhe merr në shqyrt të tij vlera me shenja të kundërta

$$f(-2) = (-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 - 1 = -8 + 24 - 1 = 15 \Rightarrow f(-2) > 0$$

$$f(0) = 0^3 + 6 \cdot 0^2 - 1 = -1 \Rightarrow f(0) = -1 < 0$$

Në bazë të teoremës, ekziston të paktën një pikë $c \in]-2; 0[$

e tillë që $f(c) = 0$, pra $c^3 + 6 \cdot c^2 - 1 = 0$ dmthi $\boxed{x=c}$ është rrënjë e ekuacionit $f(x) = 0$.

19. Bashkësia e përcaktimit të funksionit $y = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{16-x^2}}$ është:

3 pikë

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x-3 \geq 0 \wedge 16-x^2 > 0 \right\} \text{ ose } \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 16-x^2 > 0 \end{cases}$$

1. $x-3 \geq 0$
 $x \geq 3$

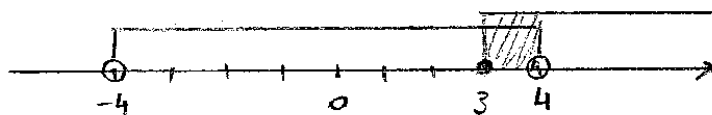
$$A = [3; +\infty[$$

$$E = A \cap B$$

2. $16-x^2 > 0$
 $16-x^2 = 0$
 $x = \pm 4$

$$B =]-4; 4[$$

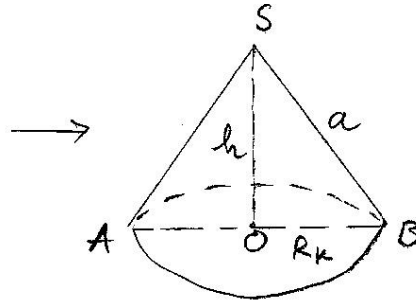
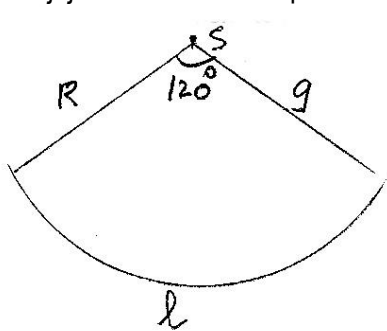
x	-∞	-4	4	+∞
16-x ²		0	0	
		-	+	-
			√	



$$E = [3; 4[$$

20. Një sektor qarku me rreze 9cm dhe kënd qëndror 120° "mbështillet" dhe formohet një kon rrethor i drejtë.
Gjej vëllimin e konit të përfutur.

3 pikë



$$V_k = \frac{1}{3} S_b \cdot h$$

$$S_b = \pi R_k^2$$

$$P_{b.k.} = 2\pi R_k$$

Gjakuja e harkut të sektorit qarkor, që i përgjigjet këndit n° :

$$l = \frac{\pi \cdot R \cdot n^\circ}{180^\circ} \Rightarrow l = \frac{\pi \cdot 9 \cdot 120^\circ}{180^\circ} = 6\pi. \text{ Por } P_{b.k.} = l = 6\pi \text{ sepse}$$

Perimetri i bazës së konit është sa gjatësia e harkut l :

$$2\pi R_k = 6\pi \Rightarrow R_k = 3 \text{ cm. } S_{b.k.} = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \text{ cm}^2$$

Rruza e sektorit të qarkut është sa përfaqësojë konit: $a = 9 \text{ cm}$

Në Δ kënddrejtë SOB kemi: $h^2 = a^2 - R_k^2 = 9^2 - 3^2 = 72 \Rightarrow h = \sqrt{72}$

$$h = 6\sqrt{2} \text{ cm.}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 9\pi \cdot 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2} \pi \text{ cm}^3$$

21. Jepet vargu me kufizë të përgjithshme $y_n = 3n + 6$, për $n \in \mathbb{N}$

a) Tregoni që ky varg formon progresion aritmetik.

2 pikë

Që vargu y_n ($n \in \mathbb{N}$) të formojë progresion aritmetik duhet dhe mjafton që $y_{n+1} - y_n = d$ (d -konstante) $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$y_{n+1} = 3(n+1) + 6 = 3n + 3 + 6 = 3n + 9$$

$$\begin{aligned} \text{Njehsojmë ndryshesën: } y_{n+1} - y_n &= 3n + 9 - (3n + 6) = \\ &= 3n + 9 - 3n - 6 = 3 \end{aligned}$$

Përgjigje: Vargu i dhënë formon P.A. me diferencë $d=3$.

b) A është numri 33 kufizë e këtij vargu? Argumento përgjigjen.

1 pikë

Që numri 33 të jetë kufizë e vargut, duhet që të ekzistojë një $n \in \mathbb{N}$ / $y_n = 33$

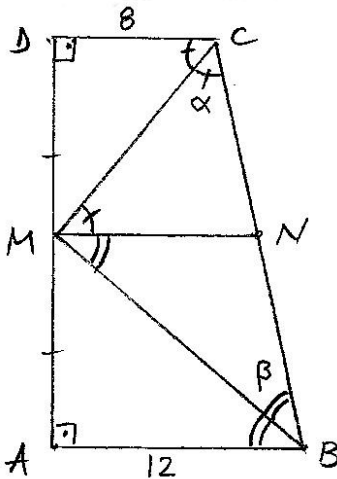
$$\text{Pra } 33 = 3n + 6 \Rightarrow 3n = 27 \Rightarrow n = 9$$

$$\text{Pra } \boxed{y_9 = 33}$$

22. Jepet trapezi kënddrejtë ABCD me kënde të drejta në A dhe D dhe baza AB=12cm, DC=8cm. Përgjysmoret e këndeve jo të drejta priten në mesin e brinjës anësore AD.

a) Gjeni gjatësinë e vijës së mesme të trapezitet.

1 pikë



Ndertojmë $MN \parallel AB$ ku M mes' AD

MN vijë e mesme e trapezitet:

$$MN \parallel AB \parallel DC$$

$$MN = \frac{AB + DC}{2} = \frac{12 + 8}{2} = 10 \text{ cm.}$$

b) Gjeni gjatësinë e brinjës anësore BC.

2 pikë

Shënojmë $\hat{C} = 2\alpha$ dhe $\hat{B} = 2\beta$

Megjithatë $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ si kënde shtruese, kemi $\alpha + \beta = 90^\circ$

Pra $\hat{CMB} = 90^\circ$ në $\triangle CMB$.

Në këtë kënddrejtë MN është mesore dhe BC hipotenuzë
 Prandaj $BC = 2 \cdot MN = 2 \cdot 10 = 20 \text{ cm.}$

23. Në një kuti ndodhen 5 etiketa të shënuara me numrat 1;2;3;4;5. Nxirren rastësisht dy etiketa njëra pas tjetrës.

Sa është probabiliteti që çifti i nxjerrë të plotësojë kushtin: "numri i etiketës së parë të jetë më i vogël se numri i etiketës së dytë"?

2 pikë

Nga kutia mund të nxjerrim gjithësej $\boxed{5} \boxed{4} = 5 \cdot 4 = 20$ çifte të mundshme etiketash. Pra $n(H) = 20$

Ngjajja A përbehet nga $\{(x; y) \mid x < y\}$

$$A = \{(1; 2) (1; 3) (1; 4) (1; 5) (2; 3) (2; 4) (2; 5) (3; 4) (3; 5) (4; 5)\}$$

$$n(A) = 10$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(H)} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

24. Mesatarja aritmetike e 7 numrave të çfarëdoshëm është 7. Nëse hiqet njëri prej tyre, mesatarja aritmetike e numrave të mbetur është përsëri 7. Gjeni numrin e hequr.

2 pikë

$$m_1 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_7}{7} = 7 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 49$$

$$m_2 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_6}{6} = 7 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 42$$

$$x_7 = 49 - 42 = 7$$

Përgjigje: Numri i hequr është numri 7.

25. Jepet elipsi me ekuacion $8x^2 + 9y^2 = 72$

- a) Gjeni largesën vatrore.

1 pikë

Trajta e rregullt e ekuacionit të elipsit është:

$$\frac{8x^2}{72} + \frac{9y^2}{72} = \frac{72}{72}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$$

Dime që $c^2 = a^2 - b^2$

$$c^2 = 9 - 8 = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{1} = 1$$

Largesa vatrore është $2c = 2 \cdot 1 = 2$ njësi.

- b) Gjeni ekuacionin e tangentes ndaj tij, e cila formon me boshtin OX këndin 60° .

2 pikë

Ekuacionin e tangentes e kërkojmë në trajtën $y = kx + t$
Meqë $(\text{tj} \wedge \text{ox}) = 60^\circ$, kemi $k_{\text{tj}} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

Meqë drejtëza (tj) është tangjente ndaj elipsit, ajo plotëson kushtin: $a^2k^2 + b^2 = t^2$

$$9 \cdot (\sqrt{3})^2 + 8 = t^2 \quad \Rightarrow \quad 27 + 8 = t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 = 35 \quad \Rightarrow \quad t = \pm \sqrt{35}$$

Ekuacionet e tangjenteve janë: $y = \sqrt{3}x + \sqrt{35}$
 $y = \sqrt{3}x - \sqrt{35}$